λ-MATRICES Y MATRIZ DE JORDÁN

Ejercicio 0.1 *Reduzca las siguientes λ-matrices a su forma canónica mediante transformaciones elementales.*

a) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 0.2 *Para las λ-matrices dadas, calcule los divisores elementales, los vectores invariantes y la forma canónica de laλ- matriz.*

a) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda^2+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$

Ejercicio 0.3 *Para cada uno de los endomorfismos de K^n que se dan a continuación, determine si se pueden representar por una matriz de Jordán y encuentre una base en la cual el endomorfismo se represente por una matriz de Jordán.*

a) $f(x,y,z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$

b) $f(x,y,z) = (-x,-y,z)$

c) $f(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$

d) $f(x,y,z) = (2x+5y-6z, 4x+6y-9z, 3x+6y-8z)$

e) $f(x,y,z) = (-x,y,z)$

f) $f(x,y,z) = (4x+y+z, x+4y+z, x+y+4z)$

g) $f(x,y,z,t) = (x-3y+3t, -2x-6y+13t, -3y+z+3t, -x-4y+8t)$

h) $f(x,y,z,t) = (3x-y+z-7t, 9x-3y-7z-t, 4z-8t, 2z-4t)$

i) $f(x,y,z,t) = (3x-4y+2t, 4x-5y-2z+4t, 3z-2t, 2z-t)$

j) $f(x,y,z,t) = (2z+3t, -2z-3t, 2x-2y-t, 3x-3y-z-3t)$

Ejercicio 0.4 *Para cada una de las matrices siguientes, determine si existe una matriz de Jordán semejante, y en caso de que sea posible, encuentre una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$.*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$f)\ \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\quad g)\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}\quad h)\begin{pmatrix}3&1&0\\0&-4&-1\\4&-8&-2\end{pmatrix}\quad i)\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\quad j)\begin{pmatrix}5&-1&9\\3&4&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$k)\ \begin{pmatrix}-3&-1&1\\-6&-1&2\\2&1&0\end{pmatrix}\quad l)\begin{pmatrix}-9&4&4\\-8&3&4\\-16&8&7\end{pmatrix}\quad m)\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}\quad n)\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}\quad o)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 0.5 *Para las matrices dadas, determine si existe una matriz de Jordán real J semejante y en caso de que sea posible, encuentre una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$.*

$$a)\ \begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\quad b)\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}\quad c)\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}\quad d)\begin{pmatrix}3&-2&-2\\5&4&5\\3&1&0\end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix}3&2&-3\\4&10&-12\\3&6&-7\end{pmatrix}\quad f)\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\quad g)\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-17&-6&-1&0\end{pmatrix}\quad h)\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

$$i)\ \begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&5\end{pmatrix}\quad j)\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-4&0\\3&0&0\end{pmatrix}\quad k)\begin{pmatrix}0&-3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}\quad l)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 0.6 *Determine la forma canónica de una λ-matriz de orden 5 y rango 4, cuyo sistema de divisores elementales tiene por factores a λ, λ, λ^2, $(\lambda+1)$, $(\lambda+1)^2$, $(\lambda-1)$.*

Ejercicio 0.7 *Demuestre que toda matriz compleja A de orden n es semejante a su traspuesta.*

Ejercicio 0.8 *Demuestre que todas las matrices complejas A de orden n que cumplen $A^n = I_n$ son semejantes.*

Ejercicio 0.9 *Sea A una matriz compleja de orden n que tiene todos sus valores propios reales. Demuestre que A es semejante a una matriz real.*