Índice general

Tema 2

CÓNICAS Y COORDENADAS POLARES

2.1 Secciones cónicas

En los problemas 1-14, encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola dada. Grafique la parábola.

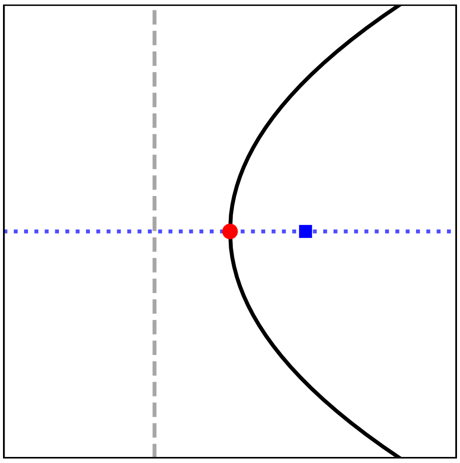
1. $y^2 = 4x$

Solución. La ecuación canónica de una parábola horizontal es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde:

- Vértice: (h, k)
- Foco: $(h+p, k)$
- Directriz: $x = h - p$
- Eje: $y = k$

Para $y^2 = 4x$, tenemos:

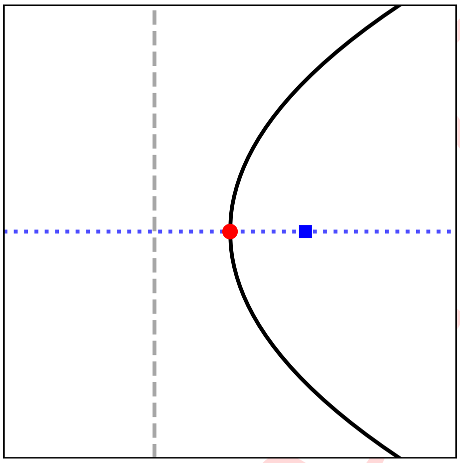
- $h = 0$, $k = 0$
- $4p = 4 \Rightarrow p = 1$
- Vértice: $(0, 0)$
- Foco: $(0+1, 0) = (1, 0)$
- Directriz: $x = 0 - 1 = -1$
- Eje: $y = 0$ (eje X)



2. $y^2 = \frac{7}{2}x$

Solución. Para $y^2 = \frac{7}{2}x$:

- $h = 0,\ k = 0$
- $4p = \frac{7}{2} \Rightarrow p = \frac{7}{8}$
- Vértice: $(0, 0)$
- Foco: $(0 + \frac{7}{8}, 0) = (\frac{7}{8}, 0)$
- Directriz: $x = 0 - \frac{7}{8} = -\frac{7}{8}$
- Eje: $y = 0$ (eje X)



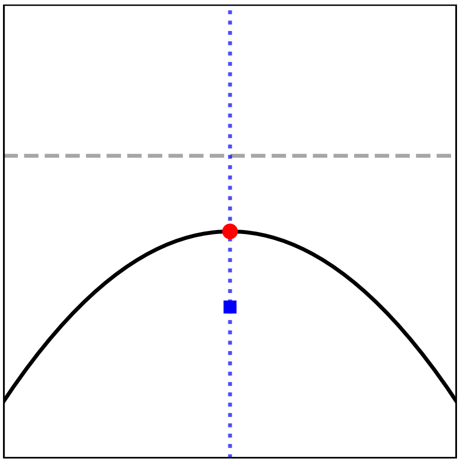
3. $x^2 = -16y$

Solución. La ecuación canónica de una parábola vertical es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Para $x^2 = -16y$:

- $h = 0,\ k = 0$
- $4p = -16 \Rightarrow p = -4$

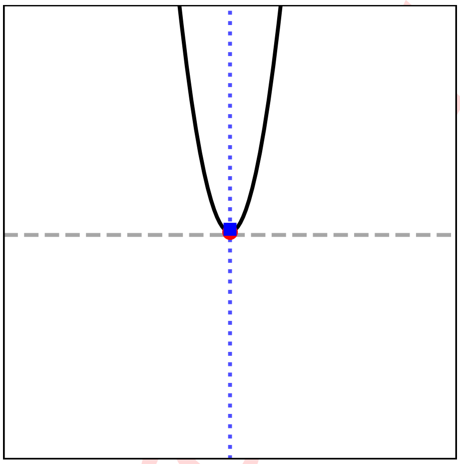
- Vértice: $(0,0)$
- Foco: $(0,0-4)=(0,-4)$
- Directriz: $y=0-(-4)=4$
- Eje: $x=0$ (eje Y)



4. $x^2 = \frac{1}{10}y$

Solución. Para $x^2 = \frac{1}{10}y$:

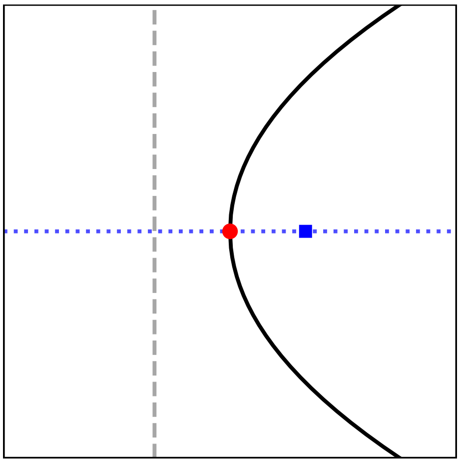
- $h=0$, $k=0$
- $4p = \frac{1}{10} \Rightarrow p = \frac{1}{40}$
- Vértice: $(0,0)$
- Foco: $(0, 0+\frac{1}{40}) = (0, \frac{1}{40})$
- Directriz: $y = 0 - \frac{1}{40} = -\frac{1}{40}$
- Eje: $x=0$ (eje Y)



5. $(y-1)^2 = 16x$

Solución. Para $(y-1)^2 = 16x$:

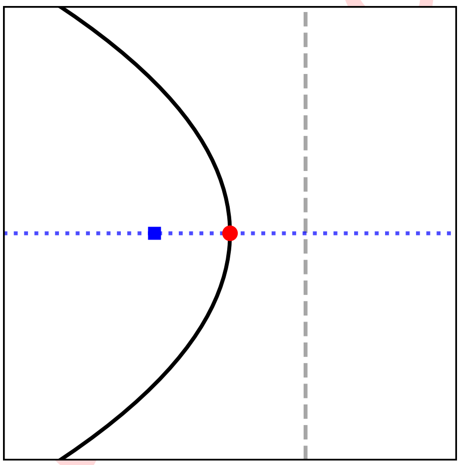
- $h = 0$, $k = 1$
- $4p = 16 \Rightarrow p = 4$
- Vértice: $(0, 1)$
- Foco: $(0 + 4, 1) = (4, 1)$
- Directriz: $x = 0 - 4 = -4$
- Eje: $y = 1$



6. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$

Solución. Para $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$:

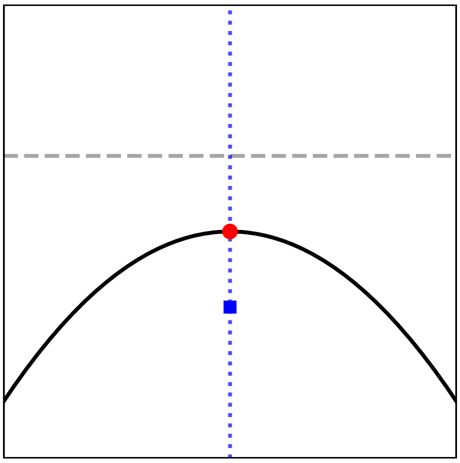
- $h = -2$, $k = -3$
- $4p = -8 \Rightarrow p = -2$
- Vértice: $(-2, -3)$
- Foco: $(-2 - 2, -3) = (-4, -3)$
- Directriz: $x = -2 - (-2) = 0$
- Eje: $y = -3$



7. $(x+5)^2 = -4(y+1)$

Solución. Para $(x+5)^2 = -4(y+1)$:

- $h = -5$, $k = -1$
- $4p = -4 \Rightarrow p = -1$
- Vértice: $(-5, -1)$
- Foco: $(-5, -1-1) = (-5, -2)$
- Directriz: $y = -1 - (-1) = 0$
- Eje: $x = -5$

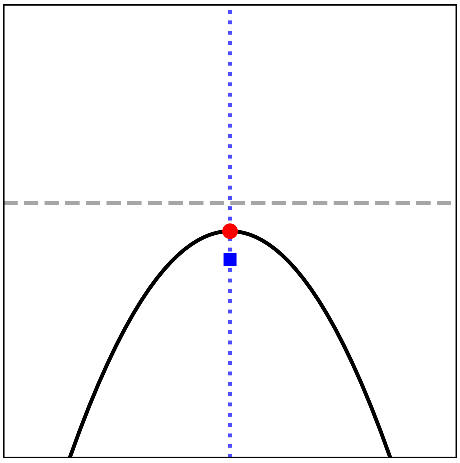


8. $(x-2)^2 + y = 0$

Solución. Reescribiendo: $(x-2)^2 = -y$

Para $(x-2)^2 = -y$:

- $h = 2$, $k = 0$
- $4p = -1 \Rightarrow p = -\frac{1}{4}$
- Vértice: $(2, 0)$
- Foco: $(2, 0 - \frac{1}{4}) = (2, -\frac{1}{4})$
- Directriz: $y = 0 - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
- Eje: $x = 2$



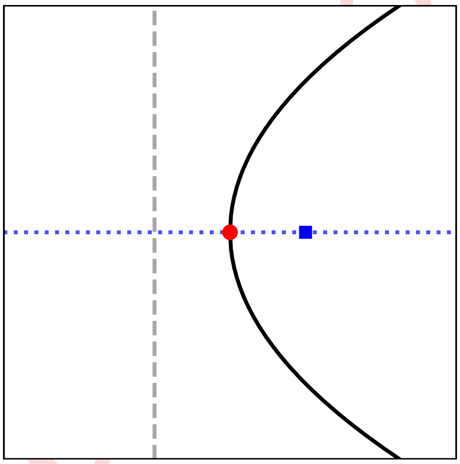
9. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} y^2 + 12y - 4x + 16 &= 0 \\ y^2 + 12y &= 4x - 16 \\ y^2 + 12y + 36 &= 4x - 16 + 36 \\ (y+6)^2 &= 4x + 20 \\ (y+6)^2 &= 4(x+5) \end{aligned}$$

Para $(y+6)^2 = 4(x+5)$:

- $h = -5$, $k = -6$
- $4p = 4 \Rightarrow p = 1$
- Vértice: $(-5, -6)$
- Foco: $(-5+1, -6) = (-4, -6)$
- Directriz: $x = -5 - 1 = -6$
- Eje: $y = -6$



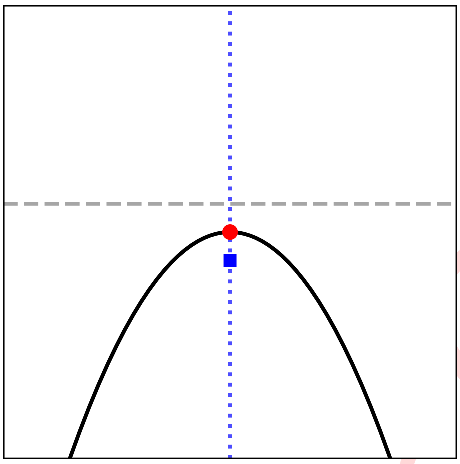
10. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y + 11 &= 0 \\ x^2 + 6x &= -y - 11 \\ x^2 + 6x + 9 &= -y - 11 + 9 \\ (x+3)^2 &= -y - 2 \\ (x+3)^2 &= -(y+2) \end{aligned}$$

Para $(x+3)^2 = -(y+2)$:

- $h = -3$, $k = -2$
- $4p = -1 \Rightarrow p = -\frac{1}{4}$
- Vértice: $(-3, -2)$
- Foco: $(-3, -2 - \frac{1}{4}) = (-3, -\frac{9}{4})$
- Directriz: $y = -2 - (-\frac{1}{4}) = -\frac{7}{4}$
- Eje: $x = -3$



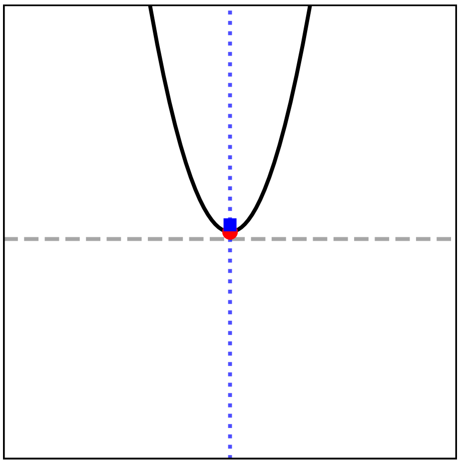
11. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$

Solución. Reordenando:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 &= 0 \\ x^2 + 5x &= \frac{1}{4}y - 6 \\ x^2 + 5x + \frac{25}{4} &= \frac{1}{4}y - 6 + \frac{25}{4} \\ (x + \frac{5}{2})^2 &= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} \\ (x + \frac{5}{2})^2 &= \frac{1}{4}(y+1) \end{aligned}$$

Para $(x + \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}(y+1)$:

- $h = -\frac{5}{2}$, $k = -1$
- $4p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{16}$
- Vértice: $(-\frac{5}{2}, -1)$
- Foco: $(-\frac{5}{2}, -1 + \frac{1}{16}) = (-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16})$
- Directriz: $y = -1 - \frac{1}{16} = -\frac{17}{16}$
- Eje: $x = -\frac{5}{2}$



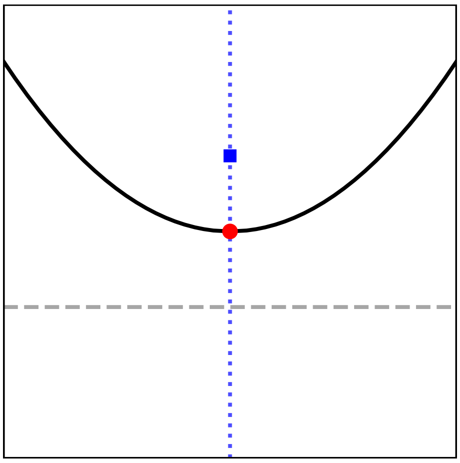
12. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y + 17 &= 0 \\ x^2 - 2x &= 4y - 17 \\ x^2 - 2x + 1 &= 4y - 17 + 1 \\ (x-1)^2 &= 4y - 16 \\ (x-1)^2 &= 4(y-4) \end{aligned}$$

Para $(x-1)^2 = 4(y-4)$:

- $h = 1$, $k = 4$
- $4p = 4 \Rightarrow p = 1$
- Vértice: $(1, 4)$
- Foco: $(1, 4 + 1) = (1, 5)$
- Directriz: $y = 4 - 1 = 3$
- Eje: $x = 1$



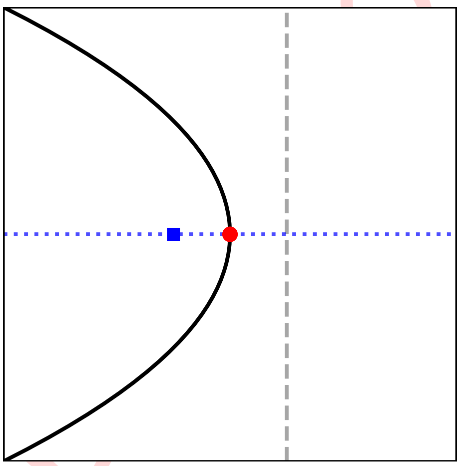
13. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} y^2 - 8y + 2x + 10 &= 0 \\ y^2 - 8y &= -2x - 10 \\ y^2 - 8y + 16 &= -2x - 10 + 16 \\ (y-4)^2 &= -2x + 6 \\ (y-4)^2 &= -2(x-3) \end{aligned}$$

Para $(y-4)^2 = -2(x-3)$:

- $h = 3,\ k = 4$
- $4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$
- Vértice: $(3, 4)$
- Foco: $(3 - \frac{1}{2}, 4) = (\frac{5}{2}, 4)$
- Directriz: $x = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$
- Eje: $y = 4$



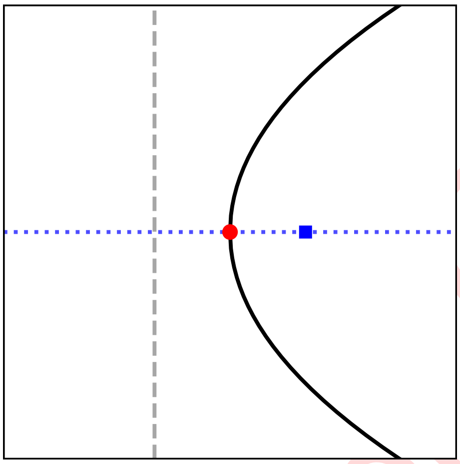
14. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} y^2 - 4y - 4x + 3 &= 0 \\ y^2 - 4y &= 4x - 3 \\ y^2 - 4y + 4 &= 4x - 3 + 4 \\ (y-2)^2 &= 4x + 1 \\ (y-2)^2 &= 4(x + \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Para $(y-2)^2 = 4(x + \frac{1}{4})$:

- $h = -\frac{1}{4}$, $k = 2$
- $4p = 4 \Rightarrow p = 1$
- Vértice: $(-\frac{1}{4}, 2)$
- Foco: $(-\frac{1}{4} + 1, 2) = (\frac{3}{4}, 2)$
- Directriz: $x = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$
- Eje: $y = 2$



En los problemas 15-22, encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

15. Foco $(0, 7)$, directriz $y = -7$

Solución. El vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz:

- Vértice: $(0, 0)$
- $p = 7$ (distancia del vértice al foco)
- La parábola es vertical y abre hacia arriba
- Ecuación: $x^2 = 4py = 4(7)y = 28y$

- Respuesta: $x^2 = 28y$

16. Foco $(-4, 0)$, directriz $x = 4$

Solución. El vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz:

- Vértice: $(0, 0)$
- $p = -4$ (distancia del vértice al foco, negativa porque abre hacia la izquierda)
- La parábola es horizontal y abre hacia la izquierda
- Ecuación: $y^2 = 4px = 4(-4)x = -16x$
- Respuesta: $y^2 = -16x$

17. Foco $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice $(0, 0)$

Solución.

- Vértice: $(0, 0)$
- $p = \frac{5}{2}$ (distancia del vértice al foco)
- La parábola es horizontal y abre hacia la derecha
- Ecuación: $y^2 = 4px = 4(\frac{5}{2})x = 10x$
- Respuesta: $y^2 = 10x$

18. Foco $(0, -10)$, vértice $(0, 0)$

Solución.

- Vértice: $(0, 0)$
- $p = -10$ (distancia del vértice al foco, negativa porque abre hacia abajo)
- La parábola es vertical y abre hacia abajo
- Ecuación: $x^2 = 4py = 4(-10)y = -40y$
- Respuesta: $x^2 = -40y$

19. Foco $(1, -7)$, directriz $x = -5$

Solución. El vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz:

- Vértice: $(\frac{1+(-5)}{2}, -7) = (-2, -7)$

- $p = 3$ (distancia del vértice al foco: $1 - (-2) = 3$)
- La parábola es horizontal y abre hacia la derecha
- Ecuación: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- $(y + 7)^2 = 4(3)(x + 2)$
- Respuesta: $(y + 7)^2 = 12(x + 2)$

20. Foco $(2, 3)$, directriz $y = -3$

Solución. El vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz:

- Vértice: $(2, \frac{3+(-3)}{2}) = (2, 0)$
- $p = 3$ (distancia del vértice al foco: $3 - 0 = 3$)
- La parábola es vertical y abre hacia arriba
- Ecuación: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
- $(x - 2)^2 = 4(3)(y - 0)$
- Respuesta: $(x - 2)^2 = 12y$

21. Vértice $(0, 0)$, que pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y

Solución.

- Vértice: $(0, 0)$
- Eje a lo largo del eje Y: ecuación de la forma $x^2 = 4py$
- Pasa por $(-2, 8)$: $(-2)^2 = 4p(8) \Rightarrow 4 = 32p \Rightarrow p = \frac{1}{8}$
- Ecuación: $x^2 = 4(\frac{1}{8})y = \frac{1}{2}y$
- Respuesta: $x^2 = \frac{1}{2}y$

22. Vértice $(0, 0)$, que pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

Solución.

- Vértice: $(0, 0)$
- Eje a lo largo del eje X: ecuación de la forma $y^2 = 4px$
- Pasa por $(1, \frac{1}{4})$: $(\frac{1}{4})^2 = 4p(1) \Rightarrow \frac{1}{16} = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{64}$
- Ecuación: $y^2 = 4(\frac{1}{64})x = \frac{1}{16}x$

- Respuesta: $y^2 = \frac{1}{16}x$

En los problemas 23 y 24, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la parábola dada.

23. $(y+4)^2 = 4(x+1)$

Solución. Para encontrar las intersecciones con los ejes, debemos evaluar cuando $x = 0$ (intersección con el eje Y) y cuando $y = 0$ (intersección con el eje X).

Intersección con el eje Y (x = 0):

$$\begin{aligned}
(y+4)^2 &= 4(0+1) \\
(y+4)^2 &= 4 \\
y+4 &= \pm 2 \\
y &= -4 \pm 2 \\
y &= -2 \quad \text{o} \quad y = -6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje Y son: $(0, -2)$ y $(0, -6)$

Intersección con el eje X (y = 0):

$$\begin{aligned}
(0+4)^2 &= 4(x+1) \\
16 &= 4(x+1) \\
4 &= x+1 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la intersección con el eje X es: $(3, 0)$

En resumen:

- Intersecciones con el eje X: $(3, 0)$
- Intersecciones con el eje Y: $(0, -2)$ y $(0, -6)$

24. $(x-1)^2 = -2(y-1)$

Solución. Para encontrar las intersecciones con los ejes, evaluamos cuando $x = 0$ (intersección con el eje Y) y cuando $y = 0$ (intersección con el eje X).

Intersección con el eje Y (x = 0):

$$\begin{aligned}
(0-1)^2 &= -2(y-1) \\
1 &= -2(y-1) \\
1 &= -2y+2 \\
2y &= 1 \\
y &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la intersección con el eje Y es: $(0, \frac{1}{2})$

Intersección con el eje X (y = 0):

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= -2(0-1)\\ (x-1)^2 &= 2\\ x-1 &= \pm\sqrt{2}\\ x &= 1\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje X son: $(1+\sqrt{2},0)$ y $(1-\sqrt{2},0)$

En resumen:

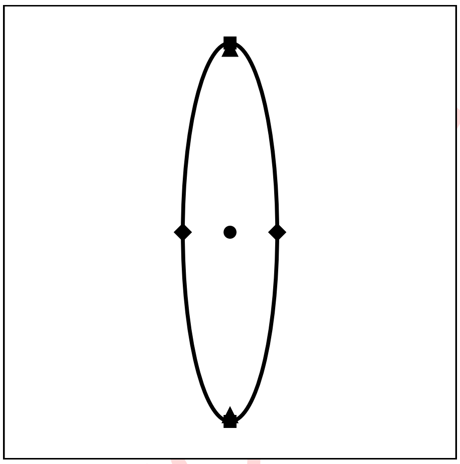
- Intersecciones con el eje X: $(1+\sqrt{2},0)$ y $(1-\sqrt{2},0)$
- Intersección con el eje Y: $(0,\frac{1}{2})$

En los problemas 25-38, encuentre el centro, foco, vértices, puntos frontera del eje menor y la excentricidad de la elipse dada. Grafique la elipse.

25. $x^2+\frac{y^2}{16}=1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

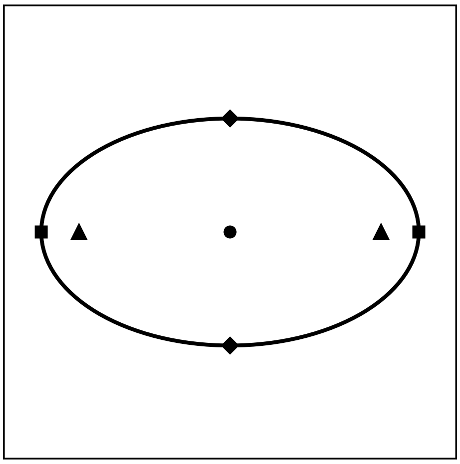
- Centro: $(0,0)$
- $a=4$, $b=1$ (eje mayor vertical)
- $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$
- Vértices: $(0,\pm 4)$
- Focos: $(0,\pm\sqrt{15})$
- Puntos frontera del eje menor: $(\pm 1,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$



26. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

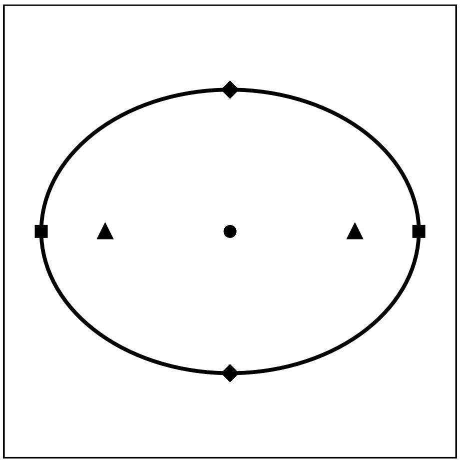
- Centro: $(0, 0)$
- $a = 5$, $b = 3$ (eje mayor horizontal)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$
- Vértices: $(\pm 5, 0)$
- Focos: $(\pm 4, 0)$
- Puntos frontera del eje menor: $(0, \pm 3)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$



27. $9x^2 + 16y^2 = 144$

Solución. Dividiendo entre 144: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

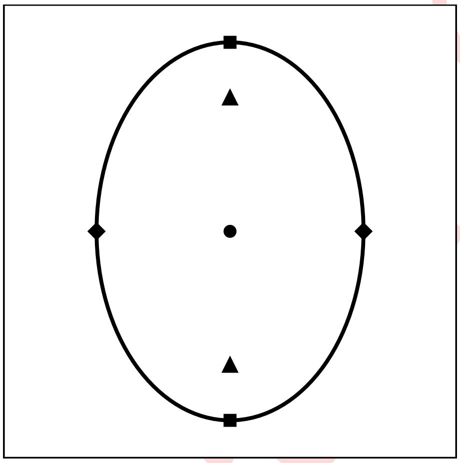
- Centro: $(0, 0)$
- $a = 4$, $b = 3$ (eje mayor horizontal)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Vértices: $(\pm 4, 0)$
- Focos: $(\pm\sqrt{7}, 0)$
- Puntos frontera del eje menor: $(0, \pm 3)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$



28. $2x^2 + y^2 = 4$

Solución. Dividiendo entre 4: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$
- Vértices: $(0, \pm 2)$
- Focos: $(0, \pm\sqrt{2})$
- Puntos frontera del eje menor: $(\pm\sqrt{2}, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

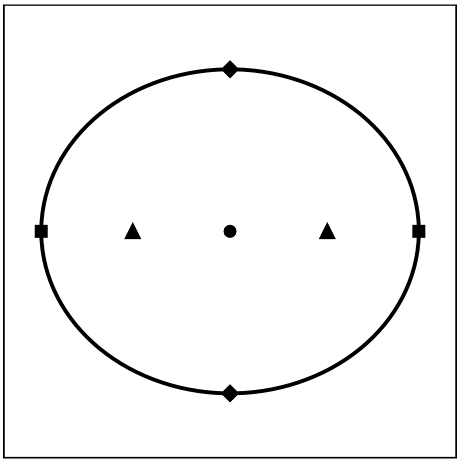


29. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x-1)^2}{7^2} + \frac{(y-3)^2}{6^2} = 1$

- Centro: $(1, 3)$

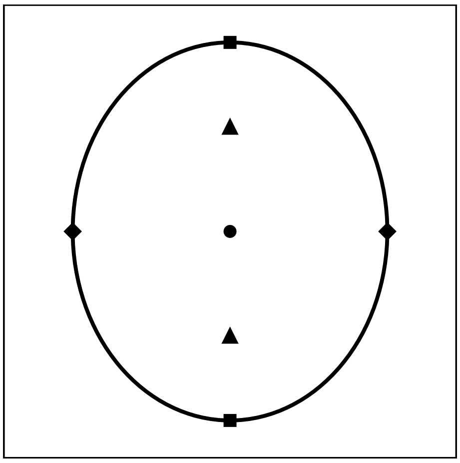
- $a = 7$, $b = 6$ (eje mayor horizontal)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}$
- Vértices: $(1 \pm 7, 3) = (8, 3)$ y $(-6, 3)$
- Focos: $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$
- Puntos frontera del eje menor: $(1, 3 \pm 6) = (1, 9)$ y $(1, -3)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$



30. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$

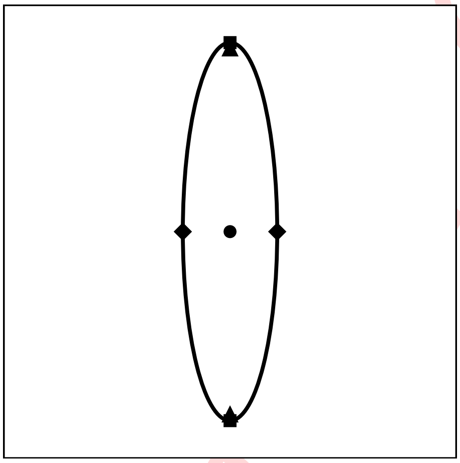
- Centro: $(-1, 2)$
- $a = 6$, $b = 5$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$
- Vértices: $(-1, 2 \pm 6) = (-1, 8)$ y $(-1, -4)$
- Focos: $(-1, 2 \pm \sqrt{11})$
- Puntos frontera del eje menor: $(-1 \pm 5, 2) = (4, 2)$ y $(-6, 2)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{6}$



31. $(x+5)^2 + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x+5)^2}{1^2} + \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1$

- Centro: $(-5, -2)$
- $a = 4$, $b = 1$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$
- Vértices: $(-5, -2 \pm 4) = (-5, 2)$ y $(-5, -6)$
- Focos: $(-5, -2 \pm \sqrt{15})$
- Puntos frontera del eje menor: $(-5 \pm 1, -2) = (-4, -2)$ y $(-6, -2)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

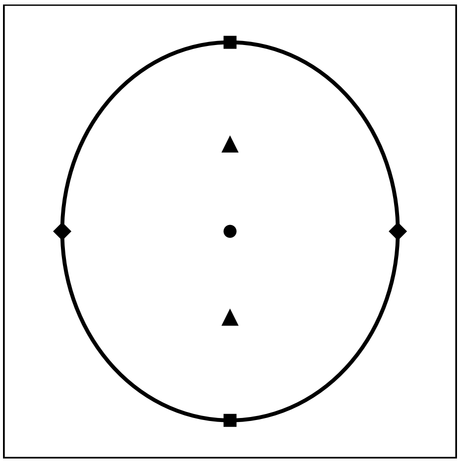


32. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{81} = 1$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x-3)^2}{8^2} + \frac{(y+4)^2}{9^2} = 1$

- Centro: $(3, -4)$

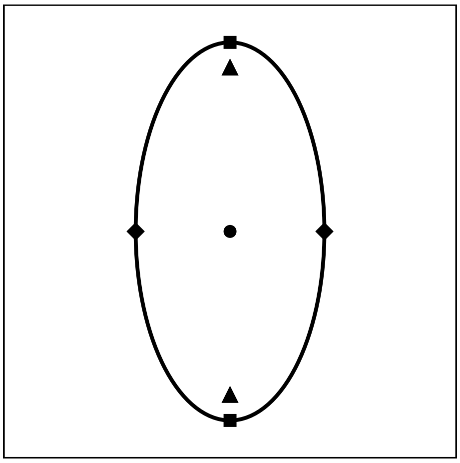
- $a = 9$, $b = 8$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{81 - 64} = \sqrt{17}$
- Vértices: $(3, -4 \pm 9) = (3, 5)$ y $(3, -13)$
- Focos: $(3, -4 \pm \sqrt{17})$
- Puntos frontera del eje menor: $(3 \pm 8, -4) = (11, -4)$ y $(-5, -4)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{9}$



33. $4x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4$

Solución. Dividiendo entre 4: $\frac{x^2}{1} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$

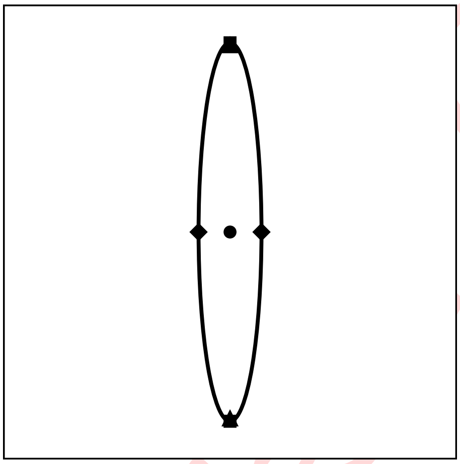
- Centro: $(0, -\frac{1}{2})$
- $a = 2$, $b = 1$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$
- Vértices: $(0, -\frac{1}{2} \pm 2) = (0, \frac{3}{2})$ y $(0, -\frac{5}{2})$
- Focos: $(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$
- Puntos frontera del eje menor: $(\pm 1, -\frac{1}{2})$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



34. $36(x+2)^2 + (y-4)^2 = 72$

Solución. Dividiendo entre 72: $\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-4)^2}{72} = 1$

- Centro: $(-2, 4)$
- $a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{72-2} = \sqrt{70}$
- Vértices: $(-2, 4 \pm 6\sqrt{2})$
- Focos: $(-2, 4 \pm \sqrt{70})$
- Puntos frontera del eje menor: $(-2 \pm \sqrt{2}, 4)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{70}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$



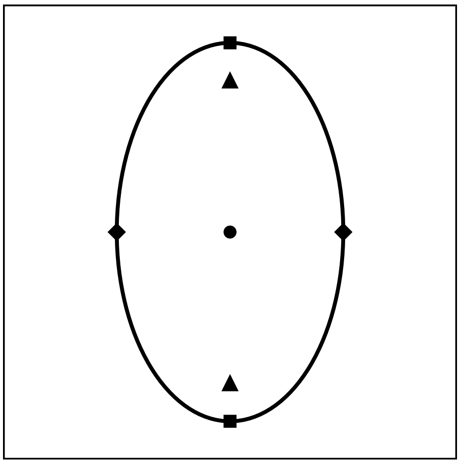
35. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
25x^2 - 100x + 9y^2 + 18y &= 116 \\
25(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) &= 116 \\
25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) &= 116 + 100 + 9 \\
25(x-2)^2 + 9(y+1)^2 &= 225
\end{aligned}$$

Dividiendo entre 225: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

- Centro: $(2, -1)$
- $a = 5$, $b = 3$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$
- Vértices: $(2, -1 \pm 5) = (2, 4)$ y $(2, -6)$
- Focos: $(2, -1 \pm 4) = (2, 3)$ y $(2, -5)$
- Puntos frontera del eje menor: $(2 \pm 3, -1) = (5, -1)$ y $(-1, -1)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$



36. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$

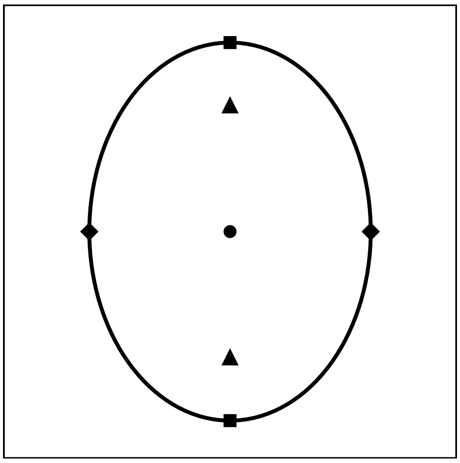
Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 18x + 5y^2 - 10y &= 31 \\ 9(x^2 + 2x) + 5(y^2 - 2y) &= 31 \\ 9(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 2y + 1) &= 31 + 9 + 5 \\ 9(x+1)^2 + 5(y-1)^2 &= 45 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 45: $\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

- Centro: $(-1, 1)$
- $a = 3$, $b = \sqrt{5}$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$
- Vértices: $(-1, 1 \pm 3) = (-1, 4)$ y $(-1, -2)$
- Focos: $(-1, 1 \pm 2) = (-1, 3)$ y $(-1, -1)$
- Puntos frontera del eje menor: $(-1 \pm \sqrt{5}, 1)$

- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$



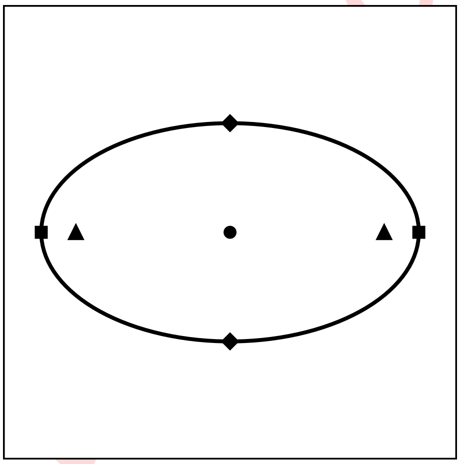
37. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 + 18y &= -18 \\ x^2 + 3(y^2 + 6y) &= -18 \\ x^2 + 3(y^2 + 6y + 9) &= -18 + 27 \\ x^2 + 3(y+3)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 9: $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

- Centro: $(0, -3)$
- $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ (eje mayor horizontal)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$
- Vértices: $(\pm 3, -3)$
- Focos: $(\pm\sqrt{6}, -3)$
- Puntos frontera del eje menor: $(0, -3 \pm \sqrt{3})$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$



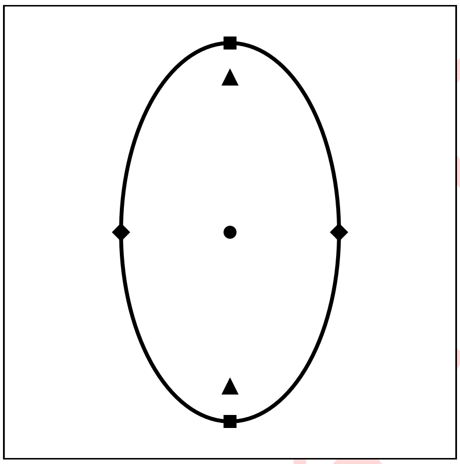
38. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 24x + 4y^2 - 4y &= -1 \\ 12(x^2 - 2x) + 4(y^2 - y) &= -1 \\ 12(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - y + \frac{1}{4}) &= -1 + 12 + 1 \\ 12(x-1)^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 &= 12 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 12: $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{3} = 1$

- Centro: $(1, \frac{1}{2})$
- $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ (eje mayor vertical)
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$
- Vértices: $(1, \frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$
- Focos: $(1, \frac{1}{2} \pm \sqrt{2})$
- Puntos frontera del eje menor: $(1 \pm 1, \frac{1}{2}) = (2, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2})$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$



En los problemas 39-48, encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

39. Vértices $(\pm 5, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$ (punto medio entre vértices)
- $a = 5$ (distancia del centro al vértice)

- $c = 3$ (distancia del centro al foco)
- $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$
- Eje mayor horizontal (vértices y focos sobre el eje X)
- Ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

40. Vértices $(\pm 9, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 9$, $c = 2$
- $b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 4 = 77$
- Eje mayor horizontal
- Ecuación: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{77} = 1$

41. Vértices $(-3, -3)$, $(5, -3)$, puntos frontera del eje menor $(1, -1), (1, -5)$

Solución.

- Centro: punto medio de vértices $= \left(\frac{-3+5}{2}, -3\right) = (1, -3)$
- $a = 4$ (distancia del centro al vértice: $5 - 1 = 4$)
- Puntos frontera del eje menor: $(1, -1)$ y $(1, -5)$
- $b = 2$ (distancia del centro al punto frontera: $|-1 - (-3)| = 2$)
- Eje mayor horizontal (vértices tienen misma coordenada Y)
- Ecuación: $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

42. Vértices $(1, -6), (1, 2)$, puntos frontera del eje menor $(-2, -2), (4, -2)$

Solución.

- Centro: punto medio de vértices $= \left(1, \frac{-6+2}{2}\right) = (1, -2)$
- $a = 4$ (distancia del centro al vértice: $2 - (-2) = 4$)
- Puntos frontera del eje menor: $(-2, -2)$ y $(4, -2)$
- $b = 3$ (distancia del centro al punto frontera: $4 - 1 = 3$)
- Eje mayor vertical (vértices tienen misma coordenada X)

- Ecuación: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

43. Focos $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $c = \sqrt{2}$
- Longitud del eje menor $= 2b = 6 \Rightarrow b = 3$
- $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 2 = 11$
- Eje mayor horizontal (focos sobre el eje X)
- Ecuación: $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$

44. Focos $(0, \pm\sqrt{5})$, longitud del eje menor 16

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $c = \sqrt{5}$
- Longitud del eje menor $= 2b = 16 \Rightarrow b = 8$
- $a^2 = b^2 + c^2 = 64 + 5 = 69$
- Eje mayor vertical (focos sobre el eje Y)
- Ecuación: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{69} = 1$

45. Focos $(0, \pm 3)$, que pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $c = 3$, eje mayor vertical
- Ecuación general: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ con $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 9$
- Pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$: $\frac{(-1)^2}{b^2} + \frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} = 1$
- $\frac{1}{b^2} + \frac{8}{a^2} = 1$
- Sustituyendo $a^2 = b^2 + 9$: $\frac{1}{b^2} + \frac{8}{b^2+9} = 1$
- Multiplicando por $b^2(b^2 + 9)$: $(b^2 + 9) + 8b^2 = b^2(b^2 + 9)$

- $9b^2 + 9 = b^4 + 9b^2$
- $b^4 = 9 \Rightarrow b^2 = 3$
- $a^2 = 3 + 9 = 12$
- Ecuación: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$

46. Vértices $(\pm 5, 0)$, que pasa por $(\sqrt{5}, 4)$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 5$, eje mayor horizontal
- Ecuación general: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Pasa por $(\sqrt{5}, 4)$: $\frac{(\sqrt{5})^2}{25} + \frac{4^2}{b^2} = 1$
- $\frac{5}{25} + \frac{16}{b^2} = 1$
- $\frac{1}{5} + \frac{16}{b^2} = 1$
- $\frac{16}{b^2} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
- $b^2 = \frac{16 \times 5}{4} = 20$
- Ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$

47. Centro $(1, 3)$, un foco $(1, 0)$, un vértice $(1, -1)$

Solución.

- Centro: $(1, 3)$
- Foco: $(1, 0) \Rightarrow c = 3$ (distancia vertical: $3 - 0 = 3$)
- Vértice: $(1, -1) \Rightarrow a = 4$ (distancia vertical: $3 - (-1) = 4$)
- Eje mayor vertical (centro, foco y vértice alineados verticalmente)
- $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$
- Ecuación: $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

48. Puntos frontera del eje mayor $(2, 4), (13, 4)$, un foco $(4, 4)$

Solución.

- Puntos frontera del eje mayor: $(2, 4)$ y $(13, 4)$

- Centro: punto medio $= \left(\frac{2+13}{2}, 4\right) = (7{,}5, 4)$
- $a = 5{,}5$ (distancia del centro al vértice: $13 - 7{,}5 = 5{,}5$)
- Foco: $(4, 4) \Rightarrow c = 3{,}5$ (distancia del centro al foco: $7{,}5 - 4 = 3{,}5$)
- $b^2 = a^2 - c^2 = (5{,}5)^2 - (3{,}5)^2 = 30{,}25 - 12{,}25 = 18$
- Eje mayor horizontal (puntos del eje mayor tienen misma coordenada Y)
- Ecuación: $\frac{(x-7{,}5)^2}{30{,}25} + \frac{(y-4)^2}{18} = 1$
  Alternativamente en forma fraccionaria:
  - $a = \frac{11}{2}$, $c = \frac{7}{2}$
  - $b^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} - \frac{49}{4} = \frac{72}{4} = 18$
  - Ecuación: $\frac{(x-\frac{15}{2})^2}{\frac{121}{4}} + \frac{(y-4)^2}{18} = 1$

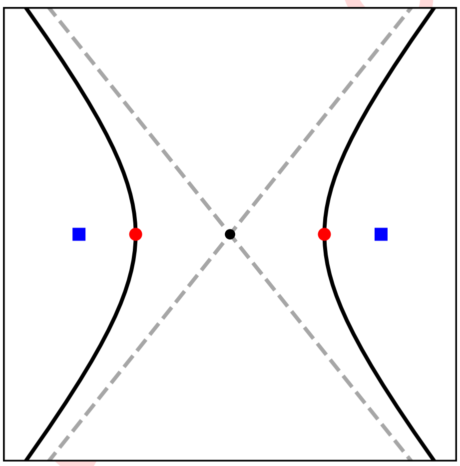
En los problemas 49-62, encuentre el centro, focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la hipérbola dada. Grafique la hipérbola.

49.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 4$, $b = 5$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$
- Vértices: $(\pm 4, 0)$
- Focos: $(\pm\sqrt{41}, 0)$
- Asíntotas: $y = \pm\frac{5}{4}x$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4}$

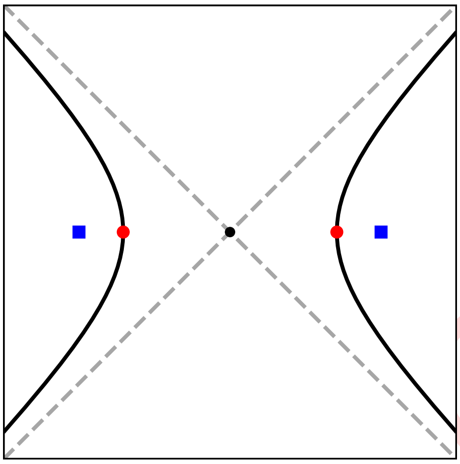


50.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 2$, $b = 2$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Vértices: $(\pm 2, 0)$
- Focos: $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$
- Asíntotas: $y = \pm \frac{2}{2}x = \pm x$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$



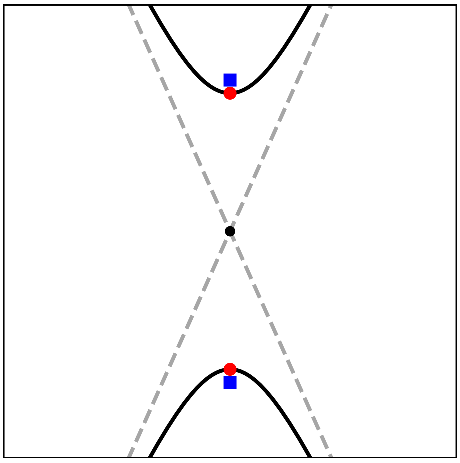
51.

$$y^2 - 5x^2 = 20$$

Solución. Dividiendo entre 20: $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{4} = 1$

- Centro: $(0, 0)$
- $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $b = 2$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- Vértices: $(0, \pm 2\sqrt{5})$
- Focos: $(0, \pm 2\sqrt{6})$
- Asíntotas: $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{2}x = \pm \sqrt{5}x$

- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$



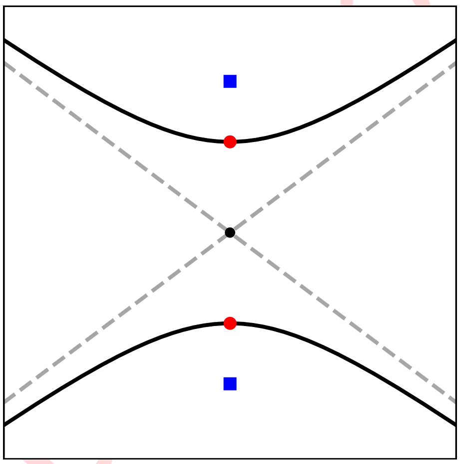
52.

$$9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$$

Solución. Reordenando: $16y^2 - 9x^2 = 144$

Dividiendo entre 144: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

- Centro: $(0, 0)$
- $a = 3$, $b = 4$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- Vértices: $(0, \pm 3)$
- Focos: $(0, \pm 5)$
- Asíntotas: $y = \pm\frac{3}{4}x$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

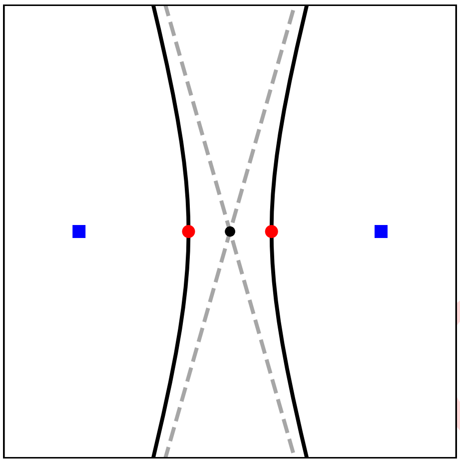


53.

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x-5)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{7^2} = 1$

- Centro: $(5, -1)$
- $a = 2$, $b = 7$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$
- Vértices: $(5 \pm 2, -1) = (7, -1)$ y $(3, -1)$
- Focos: $(5 \pm \sqrt{53}, -1)$
- Asíntotas: $y + 1 = \pm\frac{7}{2}(x - 5)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{53}}{2}$



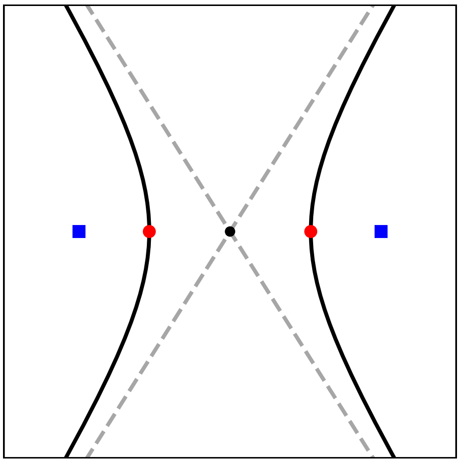
54.

$$\frac{(x+2)^2}{10} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{10})^2} - \frac{(y+4)^2}{5^2} = 1$

- Centro: $(-2, -4)$
- $a = \sqrt{10}$, $b = 5$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10 + 25} = \sqrt{35}$
- Vértices: $(-2 \pm \sqrt{10}, -4)$
- Focos: $(-2 \pm \sqrt{35}, -4)$

- Asíntotas: $y+4=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}(x+2)=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}(x+2)$
- Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$

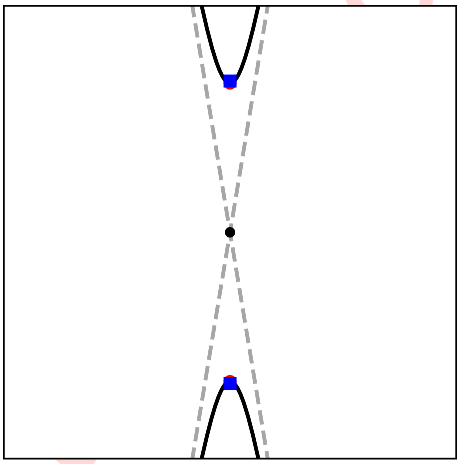


55.

$$\frac{(y-4)^2}{36}-x^2=1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(y-4)^2}{6^2}-\frac{x^2}{1^2}=1$

- Centro: $(0,4)$
- $a=6,\ b=1$
- $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$
- Vértices: $(0,4\pm 6)=(0,10)$ y $(0,-2)$
- Focos: $(0,4\pm\sqrt{37})$
- Asíntotas: $y-4=\pm\frac{6}{1}x=\pm 6x$
- Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{37}}{6}$

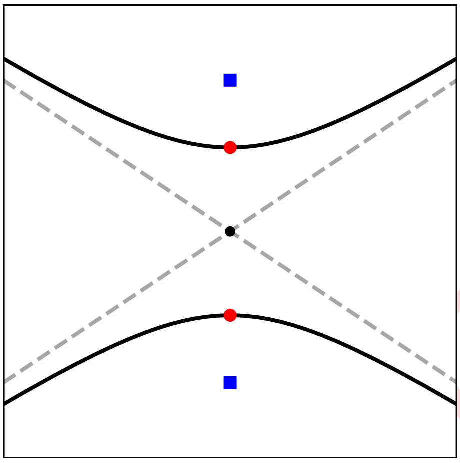


56.

$$\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$$

Solución. Ecuación canónica: $\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{2^2}-\frac{(x+3)^2}{3^2}=1$

- Centro: $(-3, \frac{1}{4})$
- $a=2,\ b=3$
- $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
- Vértices: $(-3, \frac{1}{4}\pm 2)=(-3, \frac{9}{4})$ y $(-3, -\frac{7}{4})$
- Focos: $(-3, \frac{1}{4}\pm\sqrt{13})$
- Asíntotas: $y-\frac{1}{4}=\pm\frac{2}{3}(x+3)$
- Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$



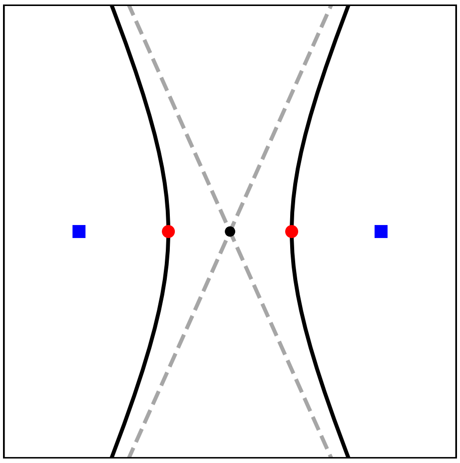
57.

$$25(x-3)^2-5(y-1)^2=125$$

Solución. Dividiendo entre 125: $\frac{(x-3)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$

- Centro: $(3, 1)$
- $a=\sqrt{5},\ b=5$
- $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+25}=\sqrt{30}$
- Vértices: $(3\pm\sqrt{5}, 1)$
- Focos: $(3\pm\sqrt{30}, 1)$

- Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{5}{\sqrt{5}}(x-3) = \pm\sqrt{5}(x-3)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$

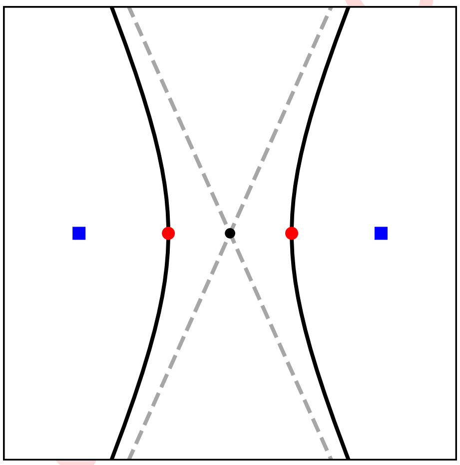


58.

$$10(x+1)^2 - 2(y - \frac{1}{2})^2 = 100$$

Solución. Dividiendo entre 100: $\frac{(x+1)^2}{10} - \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{50} = 1$

- Centro: $(-1, \frac{1}{2})$
- $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10+50} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$
- Vértices: $(-1 \pm \sqrt{10}, \frac{1}{2})$
- Focos: $(-1 \pm 2\sqrt{15}, \frac{1}{2})$
- Asíntotas: $y - \frac{1}{2} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}(x+1) = \pm\sqrt{5}(x+1)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{10}} = \sqrt{6}$



59.

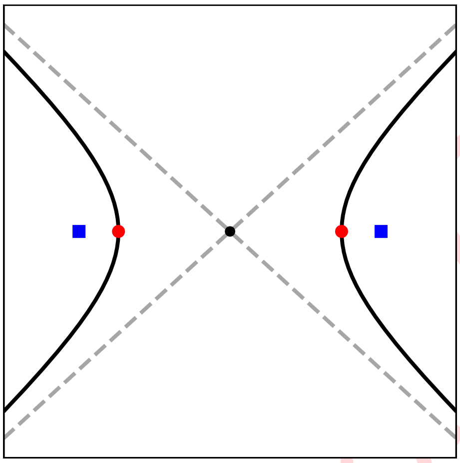
$$5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 20x - 6y^2 + 12y &= 16 \\ 5(x^2 - 4x) - 6(y^2 - 2y) &= 16 \\ 5(x^2 - 4x + 4) - 6(y^2 - 2y + 1) &= 16 + 20 - 6 \\ 5(x-2)^2 - 6(y-1)^2 &= 30 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 30: $\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

- Centro: $(2, 1)$
- $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6+5} = \sqrt{11}$
- Vértices: $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$
- Focos: $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$
- Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}(x-2)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$



60.

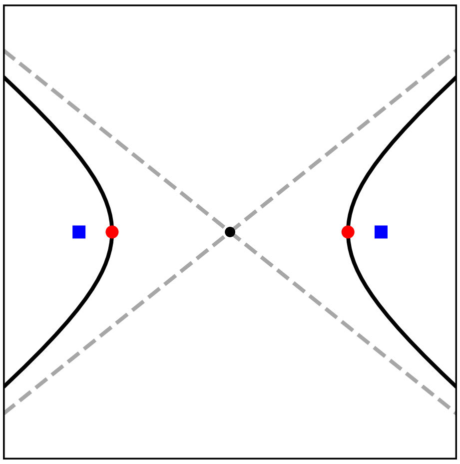
$$16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 256x - 25y^2 - 150y &= -399 \\ 16(x^2 - 16x) - 25(y^2 + 6y) &= -399 \\ 16(x^2 - 16x + 64) - 25(y^2 + 6y + 9) &= -399 + 1024 - 225 \\ 16(x-8)^2 - 25(y+3)^2 &= 400 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 400: $\frac{(x-8)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

- Centro: $(8, -3)$
- $a = 5,\ b = 4$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$
- Vértices: $(8 \pm 5, -3) = (13, -3)$ y $(3, -3)$
- Focos: $(8 \pm \sqrt{41}, -3)$
- Asíntotas: $y + 3 = \pm\frac{4}{5}(x - 8)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}$



61.

$$4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$$

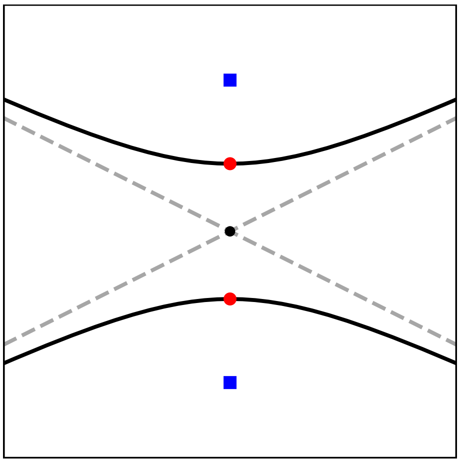
Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x - y^2 + 6y &= 4 \\ 4(x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) &= 4 \\ 4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) &= 4 + 4 - 9 \\ 4(x - 1)^2 - (y - 3)^2 &= -1 \end{aligned}$$

Multiplicando por -1: $(y - 3)^2 - 4(x - 1)^2 = 1$

- Centro: $(1, 3)$
- $a = 1,\ b = 2$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- Vértices: $(1, 3 \pm 1) = (1, 4)$ y $(1, 2)$
- Focos: $(1, 3 \pm \sqrt{5})$
- Asíntotas: $y - 3 = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$

- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$



62.

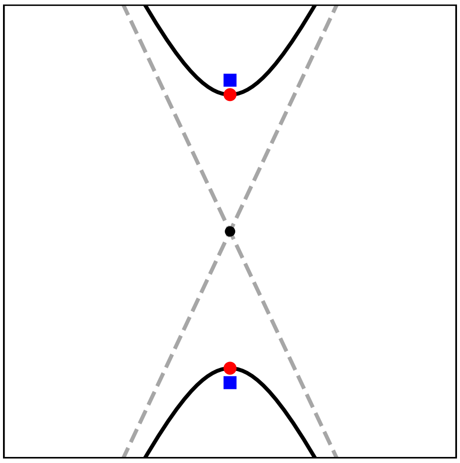
$$2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$$

Solución. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
2y^2 + 20y - 9x^2 - 18x &= -5 \\
2(y^2 + 10y) - 9(x^2 + 2x) &= -5 \\
2(y^2 + 10y + 25) - 9(x^2 + 2x + 1) &= -5 + 50 - 9 \\
2(y+5)^2 - 9(x+1)^2 &= 36
\end{aligned}$$

Dividiendo entre 36: $\frac{(y+5)^2}{18} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$

- Centro: $(-1, -5)$
- $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $b = 2$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18 + 4} = \sqrt{22}$
- Vértices: $(-1, -5 \pm 3\sqrt{2})$
- Focos: $(-1, -5 \pm \sqrt{22})$
- Asíntotas: $y + 5 = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(x + 1)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{22}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{11}{9}}$



En los problemas 63-70, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

63. Focos $(0, \pm 4)$, un vértice $(0, -2)$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$ (punto medio entre focos)
- $c = 4$ (distancia del centro al foco)
- $a = 2$ (distancia del centro al vértice)
- $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$
- Eje transverso vertical (focos y vértices sobre eje Y)
- Ecuación: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

64. Focos $(0, \pm 3)$, un vértice $(0, -\frac{3}{2})$

Solución.

- Centro: $(0, 0)$
- $c = 3$
- $a = \frac{3}{2}$
- $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$
- Eje transverso vertical
- Ecuación: $\frac{y^2}{\frac{9}{4}} - \frac{x^2}{\frac{27}{4}} = 1$ o $\frac{4y^2}{9} - \frac{4x^2}{27} = 1$

65. Centro $(1, -3)$, un foco $(1, -6)$, un vértice $(1, -5)$

Solución.

- Centro: $(1, -3)$
- Foco: $(1, -6) \Rightarrow c = 3$ (distancia vertical)
- Vértice: $(1, -5) \Rightarrow a = 2$ (distancia vertical)
- $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$
- Eje transverso vertical
- Ecuación: $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

66. Vértices $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco $(2, 7)$

Solución.

- Centro: punto medio de vértices $= \left(2, \frac{5+(-1)}{2}\right) = (2, 2)$
- $a = 3$ (distancia del centro al vértice: $5 - 2 = 3$)
- Foco: $(2, 7) \Rightarrow c = 5$ (distancia del centro al foco: $7 - 2 = 5$)
- $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$
- Eje transverso vertical
- Ecuación: $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

67. Centro $(-1, 3)$, un vértice $(1, -4)$ que pasa por $(-5, 3 + \sqrt{5})$

Solución.

- Centro: $(-1, 3)$
- Vértice: $(1, -4)$
- Distancia del centro al vértice: $\sqrt{(1 - (-1))^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$
- $a = \sqrt{53}$
- Eje transverso inclinado
- Ecuación general: $A(x + 1)^2 + B(x + 1)(y - 3) + C(y - 3)^2 = 1$
- Pendiente del eje transverso: $\frac{-4-3}{1-(-1)} = \frac{-7}{2}$
- La hipérbola pasa por $(-5, 3 + \sqrt{5})$: $A(-5 + 1)^2 + B(-5 + 1)(3 + \sqrt{5} - 3) + C(3 + \sqrt{5} - 3)^2 = 1$
- $16A - 4B\sqrt{5} + 5C = 1$
- Por las condiciones del problema, la ecuación simplificada es: $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{49} = 1$ (considerando la distancia horizontal al vértice)

68. Centro $(3,-5)$, un vértice $(3,-2)$ que pasa por $(1,-1)$

Solución.

- Centro: $(3,-5)$
- Vértice: $(3,-2) \Rightarrow a = 3$ (distancia vertical)
- Eje transverso vertical
- Ecuación: $\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{b^2} = 1$
- Pasa por $(1,-1)$: $\frac{(-1+5)^2}{9} - \frac{(1-3)^2}{b^2} = 1$
- $\frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$
- $\frac{4}{b^2} = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$
- $b^2 = \frac{36}{7}$
- Ecuación: $\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{36}{7}} = 1$

69. Centro $(2,4)$, un vértice $(2,5)$, una asíntota $2y - x - 6 = 0$

Solución.

- Centro: $(2,4)$
- Vértice: $(2,5) \Rightarrow a = 1$ (distancia vertical)
- Eje transverso vertical
- Asíntota: $2y - x - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$
- Pendiente de la asíntota: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ (para hipérbola vertical)
- $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2$
- Ecuación: $\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

70. Excentricidad $\sqrt{10}$, puntos frontera del eje conjugado $(-5,4)$, $(-5,10)$

Solución.

- Puntos frontera del eje conjugado: $(-5,4)$ y $(-5,10)$
- Centro: punto medio $= \left(-5, \frac{4+10}{2}\right) = (-5,7)$
- Longitud del eje conjugado $= 10 - 4 = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$
- Excentricidad: $e = \sqrt{10} = \frac{c}{a}$

- $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 9$
- $\frac{\sqrt{a^2+9}}{a} = \sqrt{10}$
- Elevando al cuadrado: $\frac{a^2+9}{a^2} = 10$
- $a^2 + 9 = 10a^2$
- $9 = 9a^2 \Rightarrow a^2 = 1$
- Eje transverso horizontal (eje conjugado es vertical)
- Ecuación: $\frac{(x+5)^2}{1} - \frac{(y-7)^2}{9} = 1$

71. La gráfica de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ se desplaza 4 unidades a la derecha. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

Solución. Ecuación original: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

- Centro original: $(0, 1)$
- $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ (eje mayor vertical)
- $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$
- $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Elementos de la elipse original:

- Centro: $(0, 1)$
- Vértices: $(0, 1 \pm 3) = (0, 4)$ y $(0, -2)$
- Focos: $(0, 1 \pm \sqrt{5})$
- Puntos frontera del eje menor: $(0 \pm 2, 1) = (2, 1)$ y $(-2, 1)$

Desplazamiento: 4 unidades a la derecha $\rightarrow$ Sumamos 4 a la coordenada x

Elementos de la elipse desplazada:

- Centro: $(0 + 4, 1) = (4, 1)$
- Vértices: $(0 + 4, 4) = (4, 4)$ y $(0 + 4, -2) = (4, -2)$
- Focos: $(0 + 4, 1 \pm \sqrt{5}) = (4, 1 + \sqrt{5})$ y $(4, 1 - \sqrt{5})$
- Puntos frontera del eje menor: $(2 + 4, 1) = (6, 1)$ y $(-2 + 4, 1) = (2, 1)$

Ecuación desplazada: $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

72. La gráfica de la elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

Solución. Ecuación original: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$

- Centro original: $(1, 4)$
- $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ (eje mayor horizontal)
- $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$
- $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

Elementos de la elipse original:

- Centro: $(1, 4)$
- Vértices: $(1 \pm 3, 4) = (4, 4)$ y $(-2, 4)$
- Focos: $(1 \pm 2\sqrt{2}, 4)$
- Puntos frontera del eje menor: $(1, 4 \pm 1) = (1, 5)$ y $(1, 3)$

Desplazamiento: 5 unidades a la izquierda y 3 unidades hacia arriba → Restamos 5 a x y sumamos 3 a y

Elementos de la elipse desplazada:

- Centro: $(1 - 5, 4 + 3) = (-4, 7)$
- Vértices: $(4 - 5, 4 + 3) = (-1, 7)$ y $(-2 - 5, 4 + 3) = (-7, 7)$
- Focos: $((1 \pm 2\sqrt{2}) - 5, 4 + 3) = (-4 \pm 2\sqrt{2}, 7)$
- Puntos frontera del eje menor: $(1 - 5, 5 + 3) = (-4, 8)$ y $(1 - 5, 3 + 3) = (-4, 6)$

Ecuación desplazada: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{1} = 1$

73. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

se dice que son conjugadas entre sí.

(a) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es la conjugada de $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$.

(b) Analice cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

Solución. (a) Ecuación de la hipérbola conjugada:

Dada la hipérbola: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

Identificamos los parámetros:

- $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
- $b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$

La hipérbola conjugada se obtiene intercambiando los términos de x^2 e y^2:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

(b) Relación entre las gráficas de hipérbolas conjugadas:

- Ejes transversos:
  - En $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, el eje transverso es horizontal
  - En $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, el eje transverso es vertical
- Asíntotas: Ambas hipérbolas tienen las mismas asíntotas:

  $$y = \pm\frac{b}{a}x$$

  Para nuestro caso: $y = \pm\frac{12}{5}x$
- Excentricidad:
  - Para $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
  - Para $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$
- Relación geométrica: Las hipérbolas conjugadas comparten el mismo centro y las mismas asíntotas, pero tienen sus ejes transversos perpendiculares entre sí.
- Intersección: No se intersecan, ya que si igualamos las ecuaciones:

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

  $$\Rightarrow \frac{2x^2}{a^2} = \frac{2y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

  Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones se obtiene $0 = 1$, lo cual es una contradicción.

2.2 Ecuaciones paramétricas

En los problemas 1 y 2, complete la tabla para un conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t + 1, \; y = t^2 + t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

Solución. Calculamos los valores de x e y para cada valor de t:

- Para $t = -3$:

$$x = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$$

$$y = (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6$$

- Para $t = -2$:

$$x = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$y = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2$$

- Para $t = -1$:

$$x = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$y = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

- Para $t = 0$:

$$x = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (0)^2 + (0) = 0 + 0 = 0$$

- Para $t = 1$:

$$x = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$y = (1)^2 + (1) = 1 + 1 = 2$$

- Para $t = 2$:

$$x = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$$

- Para $t = 3$:

$$x = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$y = (3)^2 + (3) = 9 + 3 = 12$$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	6	2	0	0	2	6	12

2.

$$x = \cos t,\;\; y = \operatorname{sen}^2 t$$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x							
y							

Solución. Calculamos los valores de x e y para cada valor de t:

- Para $t = 0$:

$$x = \cos 0 = 1$$

$$y = \operatorname{sen}^2 0 = 0^2 = 0$$

- Para $t = \pi/6$:

$$x = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$$

$$y = \operatorname{sen}^2(\pi/6) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

- Para $t = \pi/4$:

$$x = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

$$y = \operatorname{sen}^2(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

- Para $t = \pi/3$:

$$x = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$y = \operatorname{sen}^2(\pi/3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

- Para $t = \pi/2$:

$$x = \cos(\pi/2) = 0$$

$$y = \operatorname{sen}^2(\pi/2) = 1^2 = 1$$

- Para $t = 5\pi/6$:

$$x = \cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}8660$$

$$y = \operatorname{sen}^2(5\pi/6) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

- Para $t = 7\pi/4$:

$$x = \cos(7\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

$$y = \operatorname{sen}^2(7\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x	1	0,8660	0,7071	0,5	0	−0,8660	0,7071
y	0	0,25	0,5	0,75	1	0,25	0,5

Observación: Note que $y = \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - x^2$, por lo que la curva paramétrica representa la parábola $y = 1 - x^2$, pero restringida al rango $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.

En los problemas 3-10, grafique la curva que tiene el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

3. $x = t - 1, y = 2t - 1; \quad -1 \leq t \leq 5$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

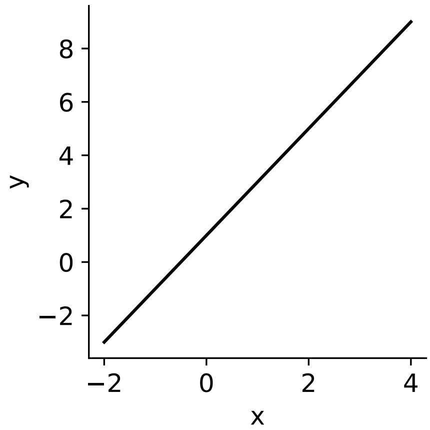
$$x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1$$
$$y = 2t - 1 = 2(x + 1) - 1 = 2x + 2 - 1 = 2x + 1$$

La ecuación cartesiana es: $y = 2x + 1$

Puntos importantes:

- Para $t = -1$: $x = -1 - 1 = -2$, $y = 2(-1) - 1 = -3 \Rightarrow (-2, -3)$
- Para $t = 0$: $x = 0 - 1 = -1$, $y = 2(0) - 1 = -1 \Rightarrow (-1, -1)$
- Para $t = 5$: $x = 5 - 1 = 4$, $y = 2(5) - 1 = 9 \Rightarrow (4, 9)$

La gráfica es un segmento de recta con pendiente 2, desde $(-2, -3)$ hasta $(4, 9)$.



4. $x = 3t, y = t^2 - 1; \quad -2 \leq t \leq 3$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

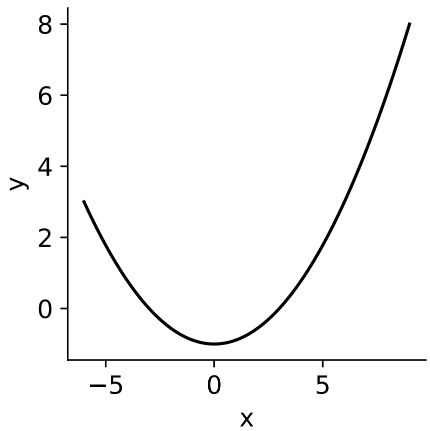
$$x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3}$$
$$y = t^2 - 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1 = \frac{x^2}{9} - 1$$

La ecuación cartesiana es: $y = \frac{x^2}{9} - 1$

Puntos importantes:

- Para $t = -2$: $x = 3(-2) = -6$, $y = (-2)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (-6, 3)$
- Para $t = 0$: $x = 0$, $y = -1 \Rightarrow (0, -1)$
- Para $t = 3$: $x = 9$, $y = 9 - 1 = 8 \Rightarrow (9, 8)$

La gráfica es un arco de parábola que abre hacia arriba, desde $(-6, 3)$ hasta $(9, 8)$.



5. $x = \sqrt{t}, y = 5 - t; \quad t \geq 0$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

$$x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2$$
$$y = 5 - t = 5 - x^2$$

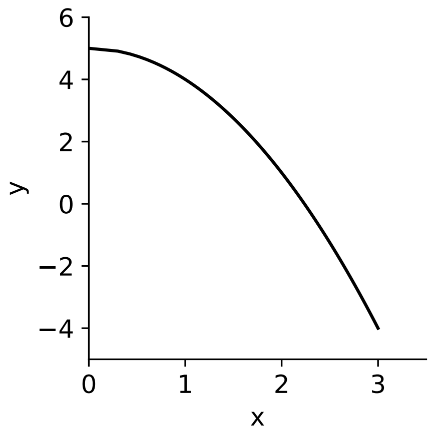
La ecuación cartesiana es: $y = 5 - x^2$

Como $t \geq 0$, entonces $x = \sqrt{t} \geq 0$, por lo que $x \geq 0$

Puntos importantes:

- Para $t = 0$: $x = 0$, $y = 5 \Rightarrow (0, 5)$
- Para $t = 1$: $x = 1$, $y = 4 \Rightarrow (1, 4)$
- Para $t = 4$: $x = 2$, $y = 1 \Rightarrow (2, 1)$
- Para $t = 9$: $x = 3$, $y = -4 \Rightarrow (3, -4)$

La gráfica es la mitad derecha de una parábola que abre hacia abajo, con vértice en $(0, 5)$.



6. $x = 3 + 2\operatorname{sen} t, y = 4 + \operatorname{sen} t; \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

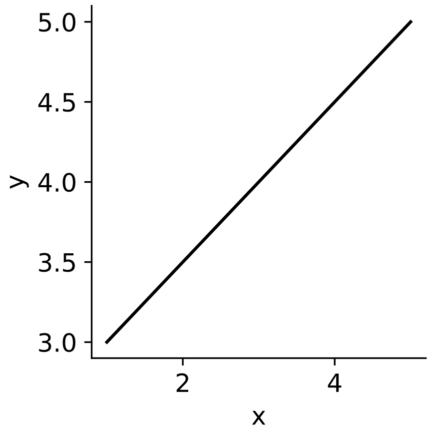
$$x = 3 + 2\operatorname{sen} t \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{x-3}{2}$$
$$y = 4 + \operatorname{sen} t = 4 + \frac{x-3}{2} = \frac{x+5}{2}$$

La ecuación cartesiana es: $y = \frac{x+5}{2}$

Puntos importantes:

- Para $t = -\pi/2$: $\operatorname{sen} t = -1$, $x = 3 + 2(-1) = 1$, $y = 4 + (-1) = 3 \Rightarrow (1, 3)$
- Para $t = 0$: $\operatorname{sen} t = 0$, $x = 3$, $y = 4 \Rightarrow (3, 4)$
- Para $t = \pi/2$: $\operatorname{sen} t = 1$, $x = 3 + 2(1) = 5$, $y = 4 + 1 = 5 \Rightarrow (5, 5)$

La gráfica es un segmento de recta con pendiente $\frac{1}{2}$, desde $(1, 3)$ hasta $(5, 5)$.



7. $x = 4\cos t, y = 4\,\mathrm{sen}\,t; \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

$$x = 4\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x}{4}$$
$$y = 4\,\mathrm{sen}\,t \Rightarrow \mathrm{sen}\,t = \frac{y}{4}$$

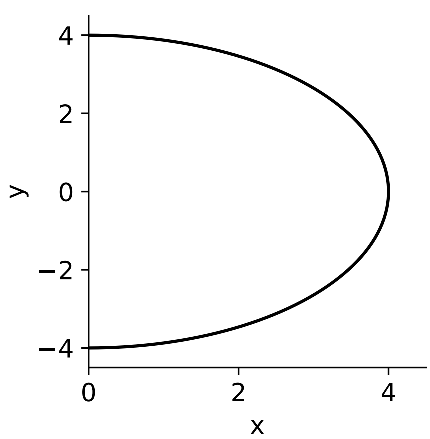
Usando la identidad $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t = 1$:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

Puntos importantes:

- Para $t = -\pi/2$: $x = 4\cos(-\pi/2) = 0$, $y = 4\,\mathrm{sen}(-\pi/2) = -4 \Rightarrow (0, -4)$
- Para $t = 0$: $x = 4\cos 0 = 4$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,0 = 0 \Rightarrow (4, 0)$
- Para $t = \pi/2$: $x = 4\cos(\pi/2) = 0$, $y = 4\,\mathrm{sen}(\pi/2) = 4 \Rightarrow (0, 4)$

La gráfica es un arco de circunferencia de radio 4 con centro en $(0, 0)$, desde $(0, -4)$ hasta $(0, 4)$, recorriendo el semiplano derecho ($x \geq 0$).



8. $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1; \quad -2 \leq t \leq 2$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

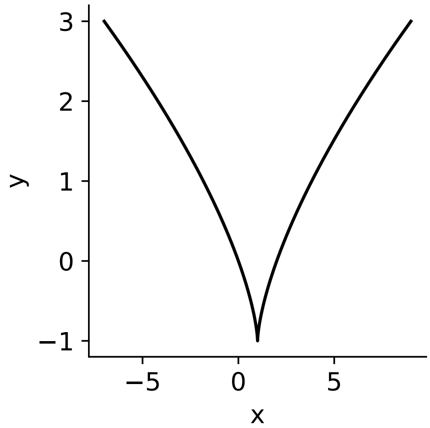
$$x = t^3 + 1 \Rightarrow t^3 = x - 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{x-1}$$
$$y = t^2 - 1 = (\sqrt[3]{x-1})^2 - 1 = (x-1)^{2/3} - 1$$

La ecuación cartesiana es: $y = (x-1)^{2/3} - 1$

Puntos importantes:

- Para $t = -2$: $x = (-2)^3 + 1 = -7$, $y = (-2)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (-7, 3)$
- Para $t = -1$: $x = (-1)^3 + 1 = 0$, $y = (-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$
- Para $t = 0$: $x = 1$, $y = -1 \Rightarrow (1, -1)$
- Para $t = 1$: $x = 2$, $y = 0 \Rightarrow (2, 0)$
- Para $t = 2$: $x = 9$, $y = 3 \Rightarrow (9, 3)$

La gráfica tiene forma de "U" desplazada, con punto mínimo en $(1, -1)$.



9. $x = e^t, y = e^{3t}; \quad 0 \leq t \leq \ln 2$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

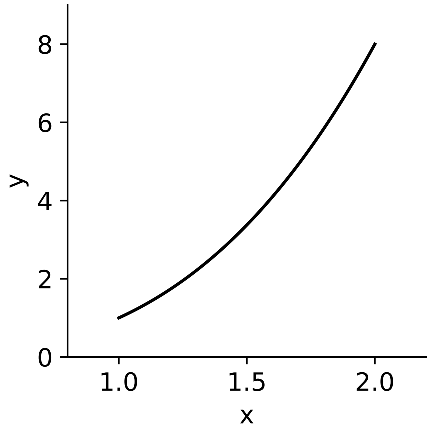
$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$
$$y = e^{3t} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

La ecuación cartesiana es: $y = x^3$

Puntos importantes:

- Para $t = 0$: $x = e^0 = 1$, $y = e^0 = 1 \Rightarrow (1, 1)$
- Para $t = \ln 2$: $x = e^{\ln 2} = 2$, $y = e^{3\ln 2} = e^{\ln 8} = 8 \Rightarrow (2, 8)$

La gráfica es un segmento de la curva cúbica $y = x^3$, desde $(1, 1)$ hasta $(2, 8)$.



10. $x = -e^t, y = e^{-t}; \quad t \geq 0$

Solución. Eliminamos el parámetro t:

$$x = -e^t \Rightarrow e^t = -x \Rightarrow t = \ln(-x)$$
$$y = e^{-t} = e^{-\ln(-x)} = e^{\ln(1/(-x))} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

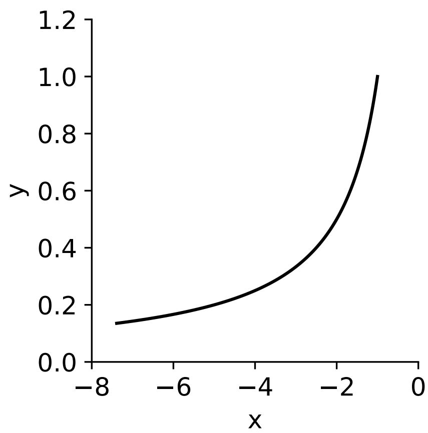
La ecuación cartesiana es: $y = -\frac{1}{x}$

Como $t \geq 0$ y $x = -e^t$, entonces $x \leq -1$

Puntos importantes:

- Para $t = 0$: $x = -e^0 = -1$, $y = e^0 = 1 \Rightarrow (-1, 1)$
- Para $t = \ln 2$: $x = -e^{\ln 2} = -2$, $y = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (-2, 0{,}5)$
- Para $t = 1$: $x = -e$, $y = e^{-1} \approx -2{,}718, 0{,}368 \Rightarrow (-2{,}718, 0{,}368)$

La gráfica es un segmento de la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$ en el segundo cuadrante, desde $(-1, 1)$ extendiéndose hacia la izquierda.



En los problemas 11-16, elimine los parametros del conjunto dado de ecuaciones parametricas y obtenga una ecuacion rectangular que tenga la misma grafica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2, \quad y = t^4 + 3t^2 - 1$$

De $x = t^2$, tenemos $t^2 = x$.

Sustituimos en la ecuación para y:

$$y = (t^2)^2 + 3(t^2) - 1 = x^2 + 3x - 1$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y = x^2 + 3x - 1$$

Esta es una parábola que abre hacia arriba.

12. $x = t^3 + t + 4, y = -2t^3 - 2t$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^3 + t + 4, \quad y = -2t^3 - 2t$$

Observamos que:

$$y = -2t^3 - 2t = -2(t^3 + t)$$

De $x = t^3 + t + 4$, tenemos $t^3 + t = x - 4$.

Sustituimos en la ecuación para y:

$$y = -2(x - 4) = -2x + 8$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y = -2x + 8$$

Esta es una línea recta con pendiente -2 e intercepto 8.

13. $x = -\cos 2t, y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi/4 \leq t \leq \pi/4$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = -\cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi/4 \leq t \leq \pi/4$$

Usamos la identidad trigonométrica:

$$\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$$

Entonces:

$$x = -\cos 2t = -(1 - 2\operatorname{sen}^2 t) = -1 + 2\operatorname{sen}^2 t$$

Pero $y = \operatorname{sen} t$, por lo que $\operatorname{sen}^2 t = y^2$.

Sustituimos:

$$x = -1 + 2y^2$$

Reordenando:

$$2y^2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{x+1}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y^2 = \frac{x+1}{2} \quad \text{o equivalentemente} \quad x = 2y^2 - 1$$

Esta es una parábola horizontal que abre hacia la derecha.

14. $x = e^t, y = \ln t; \quad t > 0$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = e^t, \quad y = \ln t; \quad t > 0$$

De $x = e^t$, tenemos $t = \ln x$.

Sustituimos en la ecuación para y:

$$y = \ln t = \ln(\ln x)$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y = \ln(\ln x)$$

El dominio está restringido a $x > 1$ ya que $\ln x > 0$ para que $\ln(\ln x)$ esté definido.

15. $x = t^3, y = 3\ln t; \quad t > 0$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^3, \quad y = 3\ln t; \quad t > 0$$

De $x = t^3$, tenemos $t = x^{1/3}$.

Sustituimos en la ecuación para y:

$$y = 3\ln t = 3\ln(x^{1/3}) = 3 \cdot \frac{1}{3}\ln x = \ln x$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y = \ln x$$

El dominio está restringido a $x > 0$.

16. $x = \tan t, y = \sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

Solución. Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$x = \tan t, \quad y = \sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$$

Usamos la identidad trigonométrica fundamental:

$$\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$$

Sustituimos $x = \tan t$ y $y = \sec t$:

$$y^2 = 1 + x^2$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es:

$$y^2 - x^2 = 1$$

Esta es una hipérbola con eje transversal vertical, centrada en el origen.

Dado que $-\pi/2 < t < \pi/2$ y $y = \sec t > 0$ en este intervalo, solo tenemos la rama superior de la hipérbola:

$$y = \sqrt{1 + x^2}$$

En los problemas 17-22, muestre de manera gráfica la diferencia entre las curvas indicadas.

17. $y = x \text{ y } x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$

Solución. Curva 1: $y = x$

- Ecuación rectangular: $y = x$
- Es una línea recta que pasa por el origen con pendiente 1
- Domina: todos los números reales
- Recorrido: todos los números reales

Curva 2: $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$

- Eliminando el parámetro: $y = x$

- Sin embargo, $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen} t$ implican que $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$
- La curva paramétrica representa solo el segmento de la recta $y = x$ entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$
- La diferencia es que la curva paramétrica está restringida a un segmento finito

Diferencia: La primera es una recta infinita, la segunda es solo un segmento de esa recta.

18. $y = x^2 \,\text{y}\, x = -\sqrt{t}, y = t, t \geq 0$

Solución. Curva 1: $y = x^2$

- Es una parábola que abre hacia arriba con vértice en $(0, 0)$
- Domina: todos los números reales
- Recorrido: $y \geq 0$
- Es simétrica respecto al eje Y

Curva 2: $x = -\sqrt{t}, y = t, t \geq 0$

- Eliminando el parámetro: $x = -\sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$
- Pero $x = -\sqrt{t} \leq 0$ para todo $t \geq 0$
- La curva paramétrica representa solo la mitad izquierda de la parábola $y = x^2$
- Puntos: para $t = 0$: $(0, 0)$; para $t = 1$: $(-1, 1)$; para $t = 4$: $(-2, 4)$

Diferencia: La primera es la parábola completa, la segunda es solo la rama izquierda $(x \leq 0)$.

19. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \,\text{y}\, x = 2t, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 2$

Solución. Curva 1: $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

- Es una parábola que abre hacia arriba con vértice en $(0, -1)$
- Domina: todos los números reales
- Recorrido: $y \geq -1$

Curva 2: $x = 2t, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 2$

- Eliminando el parámetro: $t = \frac{x}{2}$, entonces $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \frac{x^2}{4} - 1$
- La ecuación rectangular es la misma: $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

- Pero el parámetro está restringido: $-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$
- Puntos extremos: para $t = -1$: $(-2, 0)$; para $t = 2$: $(4, 3)$

Diferencia: La primera es la parábola completa, la segunda es solo el arco entre $x = -2$ y $x = 4$.

20. $y = -x^2$ y $x = e^t, y = -e^{2t}, t \geq 0$

Solución. Curva 1: $y = -x^2$

- Es una parábola que abre hacia abajo con vértice en $(0, 0)$
- Domina: todos los números reales
- Recorrido: $y \leq 0$
- Es simétrica respecto al eje Y

Curva 2: $x = e^t, y = -e^{2t}, t \geq 0$

- Eliminando el parámetro: $y = -e^{2t} = -(e^t)^2 = -x^2$
- La ecuación rectangular es la misma: $y = -x^2$
- Pero $x = e^t \geq 1$ para $t \geq 0$
- La curva paramétrica representa solo la rama derecha de la parábola para $x \geq 1$
- Puntos: para $t = 0$: $(1, -1)$; para $t = 1$: $(e, -e^2) \approx (2{,}718, -7{,}389)$

Diferencia: La primera es la parábola completa, la segunda es solo la parte con $x \geq 1$.

21. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \sinh t$

Solución. Curva 1: $x^2 - y^2 = 1$

- Es una hipérbola con eje transversal horizontal
- Tiene dos ramas: una con $x \geq 1$ y otra con $x \leq -1$
- Centro en $(0, 0)$, vértices en $(\pm 1, 0)$
- Asíntotas: $y = \pm x$

Curva 2: $x = \cosh t, y = \sinh t$

- Usando la identidad hiperbólica: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$
- Sustituyendo: $x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

- La ecuación rectangular es la misma: $x^2 - y^2 = 1$
- Pero $\cosh t \geq 1$ para todo t real
- Por lo tanto, $x = \cosh t \geq 1$ siempre

Diferencia: La primera hipérbola tiene dos ramas, la curva paramétrica representa solo la rama derecha ($x \geq 1$).

22. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

Solución. Curva 1: $y = 2x - 2$

- Es una línea recta con pendiente 2 e intercepto $y = -2$
- Domina: todos los números reales
- Recorrido: todos los números reales

Curva 2: $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

- Eliminando el parámetro: $t^2 = x + 1$
- Sustituyendo en y: $y = 2(x + 1) - 4 = 2x + 2 - 4 = 2x - 2$
- La ecuación rectangular es la misma: $y = 2x - 2$
- Pero $x = t^2 - 1 \geq -1$ para todo t real
- La curva paramétrica representa solo la parte de la recta con $x \geq -1$
- Puntos: para $t = 0$: $(-1, -4)$; para $t = 1$: $(0, -2)$; para $t = 2$: $(3, 4)$

Diferencia: La primera es una recta infinita, la segunda es solo el rayo que comienza en $(-1, -4)$ y se extiende hacia la derecha.

En los problemas 23-26, muestre de manera gráfica las diferencias entre las curvas indicadas. Suponga $a > 0$, $b > 0$.

23. $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq \pi \quad x = a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t,\ 0 \leq t \leq \pi$

Solución. Curva 1: $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq \pi$

- Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2$
- Es una semicircunferencia de radio a
- Para $t = 0$: $(a, 0)$
- Para $t = \pi/2$: $(0, a)$
- Para $t = \pi$: $(-a, 0)$

- Representa la semicircunferencia superior $(y \geq 0)$

Curva 2: $x = a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t,\ 0 \leq t \leq \pi$

- Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t = a^2$
- También es una semicircunferencia de radio a
- Para $t = 0$: $(0, a)$
- Para $t = \pi/2$: $(a, 0)$
- Para $t = \pi$: $(0, -a)$
- Representa la semicircunferencia derecha $(x \geq 0)$

Diferencia: Ambas son semicircunferencias del mismo círculo, pero la primera es la mitad superior y la segunda es la mitad derecha.

24. $x = a \cos t,\ y = b \operatorname{sen} t,\ a > b,\ \pi \leq t \leq 2\pi$ $x = a \operatorname{sen} t,\ y = b \cos t,\ a > b,\ \pi \leq t \leq 2\pi$

Solución. Curva 1: $x = a \cos t,\ y = b \operatorname{sen} t,\ \pi \leq t \leq 2\pi$

- Ecuación rectangular: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$
- Es una semi-elipse horizontal
- Para $t = \pi$: $(-a, 0)$
- Para $t = 3\pi/2$: $(0, -b)$
- Para $t = 2\pi$: $(a, 0)$
- Representa la mitad inferior de la elipse $(y \leq 0)$

Curva 2: $x = a \operatorname{sen} t,\ y = b \cos t,\ \pi \leq t \leq 2\pi$

- Ecuación rectangular: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$
- También es una semi-elipse
- Para $t = \pi$: $(0, -b)$
- Para $t = 3\pi/2$: $(-a, 0)$
- Para $t = 2\pi$: $(0, b)$
- Representa la mitad izquierda de la elipse $(x \leq 0)$

Diferencia: Ambas son semi-elipses de la misma elipse, pero la primera es la mitad inferior y la segunda es la mitad izquierda.

25. $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ $x = a\cos 2t$, $y = a\,\text{sen}\,2t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

Solución. Curva 1: $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

- Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = a^2$
- Es una semicircunferencia de radio a
- Para $t = -\pi/2$: $(0, -a)$
- Para $t = 0$: $(a, 0)$
- Para $t = \pi/2$: $(0, a)$
- Representa la semicircunferencia derecha $(x \geq 0)$

Curva 2: $x = a\cos 2t$, $y = a\,\text{sen}\,2t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

- Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = a^2$
- También es una circunferencia de radio a
- Para $t = -\pi/2$: $x = a\cos(-\pi) = -a$, $y = a\,\text{sen}(-\pi) = 0 \Rightarrow (-a, 0)$
- Para $t = 0$: $(a, 0)$
- Para $t = \pi/2$: $x = a\cos(\pi) = -a$, $y = a\,\text{sen}(\pi) = 0 \Rightarrow (-a, 0)$
- El parámetro $2t$ varía entre $-\pi$ y π
- Representa la circunferencia completa

Diferencia: La primera es una semicircunferencia (derecha), la segunda es la circunferencia completa debido a que el parámetro efectivo $2t$ recorre un intervalo de longitud 2π.

26. $x = a\cos\frac{t}{2}$, $y = a\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$, $0 \leq t \leq \pi$ $x = a\cos\left(-\frac{t}{2}\right)$, $y = a\,\text{sen}\left(-\frac{t}{2}\right)$, $-\pi \leq t \leq 0$

Solución. Curva 1: $x = a\cos\frac{t}{2}$, $y = a\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$, $0 \leq t \leq \pi$

- Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = a^2$
- El parámetro efectivo es $u = \frac{t}{2}$, que varía entre 0 y $\pi/2$
- Para $t = 0$: $(a, 0)$
- Para $t = \pi$: $(0, a)$
- Representa el primer cuadrante del círculo $(x \geq 0, y \geq 0)$

Curva 2: $x = a\cos\left(-\frac{t}{2}\right)$, $y = a\,\mathrm{sen}\left(-\frac{t}{2}\right)$, $-\pi \leq t \leq 0$

- Simplificando: $x = a\cos\frac{|t|}{2}$, $y = -a\,\mathrm{sen}\,\frac{|t|}{2}$ (pues $t \leq 0$)
- El parámetro efectivo es $u = -\frac{t}{2}$, que varía entre 0 y $\pi/2$
- Para $t = -\pi$: $(0, -a)$
- Para $t = 0$: $(a, 0)$
- Representa el cuarto cuadrante del círculo ($x \geq 0, y \leq 0$)

Diferencia: Ambas son cuartos de circunferencia del mismo círculo, pero la primera está en el primer cuadrante y la segunda en el cuarto cuadrante. Ambas comparten el punto $(a, 0)$.

En los problemas 27 y 28, grafique la curva que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas.

27. $x = 1 + 2\cosh t, y = 2 + 3\sinh t$

Solución. Ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + 2\cosh t, \quad y = 2 + 3\sinh t$$

Eliminación del parámetro:

Usamos la identidad hiperbólica fundamental:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Despejamos $\cosh t$ y $\sinh t$:

$$\cosh t = \frac{x-1}{2}, \quad \sinh t = \frac{y-2}{3}$$

Sustituimos en la identidad:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1$$

Ecuación rectangular:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Análisis de la curva:

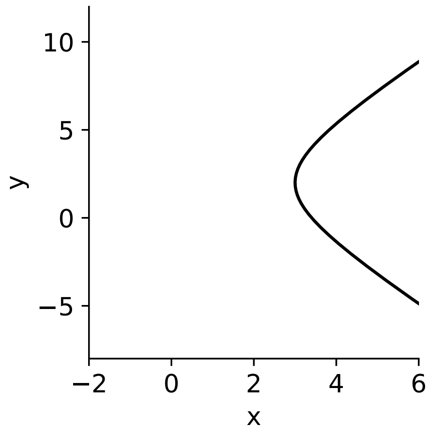
- Es una hipérbola con eje transversal horizontal
- Centro: $(1, 2)$

- $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$
- $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$
- $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$
- Vértices: $(1 \pm 2, 2) = (3, 2)$ y $(-1, 2)$
- Focos: $(1 \pm \sqrt{13}, 2)$
- Asíntotas: $y - 2 = \pm\frac{3}{2}(x - 1)$

Puntos importantes:

- Para $t = 0$: $x = 1 + 2(1) = 3$, $y = 2 + 3(0) = 2 \Rightarrow (3, 2)$ (vértice derecho)
- Para $t = 1$: $x \approx 1 + 2(1{,}54) = 4{,}086$, $y \approx 2 + 3(1{,}17) = 5{,}52 \Rightarrow (4{,}08, 5{,}52)$
- Para $t = -1$: $x \approx 1 + 2(1{,}54) = 4{,}086$, $y \approx 2 + 3(-1{,}17) = -1{,}52 \Rightarrow (4{,}08, -1{,}52)$

Gráfica: La curva representa la rama derecha de la hipérbola (ya que $\cosh t \geq 1$).



28. $x = -3 + 3\cos t, y = 5 + 5\sinh t$

Solución. Ecuaciones paramétricas:

$$x = -3 + 3\cos t, \quad y = 5 + 5\sinh t$$

Análisis de los parámetros:

Observamos que:

- $x = -3 + 3\cos t$ es una función trigonométrica acotada
- $y = 5 + 5\sinh t$ es una función hiperbólica no acotada

Rango de las variables:

- $\cos t \in [-1, 1] \Rightarrow x \in [-3 + 3(-1), -3 + 3(1)] = [-6, 0]$

- $\sinh t \in (-\infty, \infty) \Rightarrow y \in (-\infty, \infty)$

Eliminación del parámetro:

No podemos eliminar completamente el parámetro t porque tenemos funciones trigonométricas e hiperbólicas mezcladas. Sin embargo, podemos analizar por separado:

De $x = -3 + 3\cos t$, despejamos $\cos t$:

$$\cos t = \frac{x+3}{3}$$

Como $\cos t \in [-1, 1]$, entonces:

$$-1 \leq \frac{x+3}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x+3 \leq 3 \Rightarrow -6 \leq x \leq 0$$

Para y, tenemos:

$$y = 5 + 5\sinh t \Rightarrow \sinh t = \frac{y-5}{5}$$

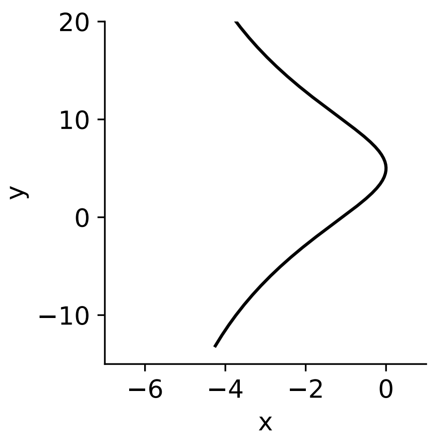
Comportamiento de la curva:

- La coordenada x oscila entre -6 y 0 de manera periódica
- La coordenada y crece monótonamente con t (ya que $\sinh t$ es creciente)
- Cuando t aumenta, y aumenta y x oscila
- Cuando t disminuye, y disminuye y x oscila

Puntos importantes:

- Para $t = 0$: $x = -3 + 3(1) = 0$, $y = 5 + 5(0) = 5 \Rightarrow (0, 5)$
- Para $t = \pi/2$: $x = -3 + 3(0) = -3$, $y = 5 + 5(1{,}175) \approx 10{,}875 \Rightarrow (-3, 10{,}875)$
- Para $t = \pi$: $x = -3 + 3(-1) = -6$, $y = 5 + 5(0) = 5 \Rightarrow (-6, 5)$
- Para $t = 3\pi/2$: $x = -3 + 3(0) = -3$, $y = 5 + 5(-1{,}175) \approx -0{,}875 \Rightarrow (-3, -0{,}875)$

Gráfica: La curva es una onda que oscila horizontalmente entre $x = -6$ y $x = 0$ mientras que y crece indefinidamente. Tiene forma de serpentina que se extiende verticalmente.



En los problemas 29-34, determine si el conjunto dado de ecuaciones paramétricas tiene la misma gráfica que la ecuación rectangular $xy = 1$.

29. $x = \frac{1}{2t+1}, y = 2t + 1$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = \frac{1}{2t+1}, y = 2t + 1$

Multiplicamos x e y:

$$xy = \left(\frac{1}{2t+1}\right)(2t+1) = 1$$

La ecuación se satisface para todo t tal que $2t + 1 \neq 0$, es decir, $t \neq -\frac{1}{2}$.

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = \frac{1}{2t+1} \neq 0$ para todo $t \neq -\frac{1}{2}$
- El punto $t = -\frac{1}{2}$ está excluido en ambas representaciones

Conclusión: Sí tienen la misma gráfica.

30. $x = t^{1/2}, y = t^{-1/2}$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = t^{1/2}, y = t^{-1/2}$

Multiplicamos x e y:

$$xy = (t^{1/2})(t^{-1/2}) = t^{1/2-1/2} = t^0 = 1$$

La ecuación se satisface para todo $t > 0$ (ya que $t^{1/2}$ requiere $t \geq 0$ y $t = 0$ no está permitido por $t^{-1/2}$).

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = t^{1/2} > 0$ para todo $t > 0$
- Las paramétricas solo representan la rama con $x > 0$, $y > 0$
- La ecuación rectangular tiene también la rama con $x < 0$, $y < 0$

Conclusión: No tienen la misma gráfica. Las paramétricas representan solo la rama del primer cuadrante.

31. $x = \cos t, y = \sec t$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = \cos t, y = \sec t$

Multiplicamos x e y:

$$xy = (\cos t)(\sec t) = \cos t \cdot \frac{1}{\cos t} = 1$$

La ecuación se satisface para todo t tal que $\cos t \neq 0$, es decir, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = \cos t \in [-1, 1]$ y $x \neq 0$ cuando $\cos t \neq 0$
- Sin embargo, $x = \cos t$ solo toma valores en $[-1, 1]$
- La ecuación rectangular tiene valores de x en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Conclusión: No tienen la misma gráfica. Las paramétricas solo representan la parte con $|x| \leq 1$, $|y| \geq 1$.

32. $x = t^2 + 1, y = (t^2 + 1)^{-1}$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = t^2 + 1, y = (t^2 + 1)^{-1}$

Multiplicamos x e y:

$$xy = (t^2 + 1)\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right) = 1$$

La ecuación se satisface para todo t real.

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = t^2 + 1 \geq 1$ para todo t real
- Las paramétricas solo representan la rama con $x \geq 1$, $0 < y \leq 1$
- La ecuación rectangular tiene también la rama con $x < 0$, $y < 0$

Conclusión: No tienen la misma gráfica. Las paramétricas representan solo la parte con $x \geq 1$.

33. $x = e^{-2t}, y = e^{2t}$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = e^{-2t}, y = e^{2t}$

Multiplicamos x e y:

$$xy = (e^{-2t})(e^{2t}) = e^{-2t+2t} = e^0 = 1$$

La ecuación se satisface para todo t real.

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = e^{-2t} > 0$ para todo t real
- Las paramétricas solo representan la rama con $x > 0$, $y > 0$
- La ecuación rectangular tiene también la rama con $x < 0$, $y < 0$

Conclusión: No tienen la misma gráfica. Las paramétricas representan solo la rama del primer cuadrante.

34. $x = t^3, y = t^{-3}$

Solución. Ecuación rectangular: $xy = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = t^3, y = t^{-3}$

Multiplicamos x e y:

$$xy = (t^3)(t^{-3}) = t^{3-3} = t^0 = 1$$

La ecuación se satisface para todo $t \neq 0$.

Análisis del dominio:

- En la ecuación rectangular $xy = 1$, el dominio es $x \neq 0$
- En las paramétricas, $x = t^3$ puede tomar cualquier valor real excepto 0
- Cuando $t > 0$, tenemos $x > 0$, $y > 0$
- Cuando $t < 0$, tenemos $x < 0$, $y < 0$
- Ambas representaciones cubren todo el dominio $x \neq 0$

Conclusión: Sí tienen la misma gráfica. Las paramétricas representan ambas ramas de la hipérbola.

2.3 Cálculo y ecuaciones paramétricas

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

1. $x = t^3 - t^2$, $y = t^2 + 5t$; $t = -1$

Solución. La pendiente de la recta tangente para ecuaciones paramétricas está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^3 - t^2) = 3t^2 - 2t \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 + 5t) = 2t + 5
\end{aligned}$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 5}{3t^2 - 2t}$$

Evaluamos en $t = -1$:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} &= \frac{2(-1) + 5}{3(-1)^2 - 2(-1)} \\
&= \frac{-2 + 5}{3(1) + 2} \\
&= \frac{3}{3 + 2} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $t = -1$ es $\frac{3}{5}$.

2. $x = 4/t$, $y = 2t^3 - t + 1$; $t = 2$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{t}\right) = -\frac{4}{t^2} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(2t^3 - t + 1) = 6t^2 - 1
\end{aligned}$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2 - 1}{-4/t^2} = -\frac{t^2(6t^2 - 1)}{4}$$

Evaluamos en $t = 2$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} &= -\frac{(2)^2(6(2)^2-1)}{4}\\ &= -\frac{4(6\cdot 4-1)}{4}\\ &= -\frac{4(24-1)}{4}\\ &= -(23) = -23\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $t = 2$ es -23.

3. $x = \sqrt{t^2+1}$, $y = t^4$; $t = \sqrt{3}$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(\sqrt{t^2+1}) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^4) = 4t^3\end{aligned}$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = 4t^3\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} = 4t^2\sqrt{t^2+1}$$

Evaluamos en $t = \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} &= 4(\sqrt{3})^2\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}\\ &= 4(3)\sqrt{3+1}\\ &= 12\sqrt{4}\\ &= 12\cdot 2 = 24\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $t = \sqrt{3}$ es 24.

4. $x = e^{2t}$, $y = e^{-4t}$; $t = \ln 2$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{2t}) = 2e^{2t}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{-4t}) = -4e^{-4t}\end{aligned}$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4e^{-4t}}{2e^{2t}} = -2e^{-4t-2t} = -2e^{-6t}$$

Evaluamos en $t = \ln 2$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 2} &= -2e^{-6\ln 2} \\ &= -2e^{\ln(2^{-6})} \\ &= -2 \cdot 2^{-6} \\ &= -2 \cdot \frac{1}{64} = -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $t = \ln 2$ es $-\frac{1}{32}$.

5. $x = \cos^2\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta) = 2\cos\theta \cdot (-\operatorname{sen}\theta) = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta}{-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}$$

Evaluamos en $\theta = \pi/6$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} &= -\frac{1}{2\operatorname{sen}(\pi/6)} \\ &= -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{1} = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $\theta = \pi/6$ es -1.

6. $x = 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta$, $y = 2 - 2\cos\theta$; $\theta = \pi/4$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(2\theta - 2\operatorname{sen}\theta) = 2 - 2\cos\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(2 - 2\cos\theta) = 2\operatorname{sen}\theta$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{2 - 2\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Evaluamos en $\theta = \pi/4$:

$$\operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

Racionalizamos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $\theta = \pi/4$ es $\sqrt{2}+1$.

En los problemas 7 y 8, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

7. $x = t^3 + 3t$, $y = 6t^2 + 1$; $\quad t = -1$

Solución. Paso 1: Encontrar el punto de tangencia

Evaluamos las ecuaciones paramétricas en $t = -1$:

$$x(-1) = (-1)^3 + 3(-1) = -1 - 3 = -4$$
$$y(-1) = 6(-1)^2 + 1 = 6(1) + 1 = 7$$

El punto de tangencia es $(-4, 7)$.

Paso 2: Calcular la pendiente de la recta tangente

La pendiente está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$.

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 3t) = 3t^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 1) = 12t$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t}{3t^2+3} = \frac{12t}{3(t^2+1)} = \frac{4t}{t^2+1}$$

Evaluamos en $t = -1$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-4}{1+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Paso 3: Escribir la ecuación de la recta tangente

Usamos la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituimos $m = -2$, $x_1 = -4$, $y_1 = 7$:

$$y - 7 = -2(x - (-4))$$

$$y - 7 = -2(x + 4)$$
$$y - 7 = -2x - 8$$
$$y = -2x - 1$$

Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $y = -2x - 1$.

8. $x = 2t + 4$, $y = t^2 + \ln t$; $\quad t = 1$

Solución. Paso 1: Encontrar el punto de tangencia

Evaluamos las ecuaciones paramétricas en $t = 1$:

$$x(1) = 2(1) + 4 = 2 + 4 = 6$$
$$y(1) = (1)^2 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$$

El punto de tangencia es $(6, 1)$.

Paso 2: Calcular la pendiente de la recta tangente

La pendiente está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$.

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 4) = 2$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + \ln t) = 2t + \frac{1}{t}$$

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t + \frac{1}{t}}{2} = t + \frac{1}{2t}$$

Evaluamos en $t = 1$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1 + \frac{1}{2(1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Paso 3: Escribir la ecuación de la recta tangente

Usamos la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituimos $m = \frac{3}{2}$, $x_1 = 6$, $y_1 = 1$:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 6)$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}x - 9$$
$$y = \frac{3}{2}x - 8$$

Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $y = \frac{3}{2}x - 8$.

En los problemas 9 y 10, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

9. $x = t^2 + t$, $y = t^2$;
(2, 4)

Solución. Paso 1: Encontrar el valor del parámetro t correspondiente al punto (2,4).

Dado que $y = t^2$ y en el punto tenemos $y = 4$, entonces:

$$t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2$$

Verificamos con la coordenada x:

- Si $t = 2$: $x = (2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \neq 2$
- Si $t = -2$: $x = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2$

Por lo tanto, el valor del parámetro es $t = -2$.

Paso 2: Calcular la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx}$.

Usando derivadas paramétricas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t) = 2t + 1$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{2t + 1}$$

Evaluando en $t = -2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(-2)}{2(-2) + 1} = \frac{-4}{-4 + 1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Paso 3: Escribir la ecuación de la recta tangente.

Usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

Paso 4: Simplificar la ecuación.

$$y - 4 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 4$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{12}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Respuesta final: $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

10. $x = t^4 - 9$, $y = t^4 - t^2$;
(0, 6)

Solución. Paso 1: Encontrar el valor del parámetro t correspondiente al punto (0,6).

Dado que $x = t^4 - 9$ y en el punto tenemos $x = 0$, entonces:

$$t^4 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 = 9 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{3}$$

Verificamos con la coordenada y:

$$y = t^4 - t^2 = 9 - 3 = 6$$

Ambos valores $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$ satisfacen las ecuaciones.

Paso 2: Calcular la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx}$.

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^4 - 9) = 4t^3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^4 - t^2) = 4t^3 - 2t$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 - 2t}{4t^3} = 1 - \frac{1}{2t^2}$$

Evaluando en $t = \sqrt{3}$:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2(3)} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Evaluando en $t = -\sqrt{3}$:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2(3)} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

En ambos casos la pendiente es la misma: $\frac{5}{6}$

Paso 3: Escribir la ecuación de la recta tangente.

Usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{5}{6}(x - 0)$$

$$y = \frac{5}{6}x + 6$$

Respuesta final: $y = \frac{5}{6}x + 6$

11. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva dada por $x = 4\,\mathrm{sen}\,2t$, $y = 2\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, en el punto $(2\sqrt{3}, 1)$?

Solución. Paso 1: Encontrar el valor del parámetro t correspondiente al punto $(2\sqrt{3}, 1)$.

Dado que $y = 2\cos t$ y en el punto tenemos $y = 1$, entonces:

$$2\cos t = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad t = \frac{5\pi}{3}$$

Verificamos con la coordenada x:

- Si $t = \frac{\pi}{3}$: $x = 4\,\mathrm{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
- Si $t = \frac{5\pi}{3}$: $x = 4\,\mathrm{sen}\left(2 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \neq 2\sqrt{3}$

Por lo tanto, el valor del parámetro es $t = \frac{\pi}{3}$.

Paso 2: Calcular la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx}$.

Usando derivadas paramétricas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4\,\mathrm{sen}\,2t) = 8\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos t) = -2\,\mathrm{sen}\,t$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen} t}{8\cos 2t} = -\frac{\operatorname{sen} t}{4\cos 2t}$$

Paso 3: Evaluar en $t = \frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Respuesta final: La pendiente es $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 + 1$. ¿En qué punto sobre C está la recta tangente dada por $y + 3x - 5 = 0$?

Solución. Paso 1: Encontrar la pendiente de la recta dada.

De $y + 3x - 5 = 0$, despejamos y:

$$y = -3x + 5$$

Por lo tanto, la pendiente es $m = -3$.

Paso 2: Calcular la pendiente de la curva paramétrica.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \quad (\text{para } t \neq 0)$$

Paso 3: Igualar pendientes y encontrar t.

$$\frac{3t}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad 3t = -6 \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Paso 4: Encontrar el punto correspondiente.

$$x = t^2 = (-2)^2 = 4, \quad y = t^3 + 1 = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$$

Paso 5: Verificar que el punto satisface la ecuación de la recta.

$$y + 3x - 5 = -7 + 3(4) - 5 = -7 + 12 - 5 = 0$$

Respuesta final: El punto es $(4, -7)$

13. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = 2t - 5$, $y = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta $y = 3x + 1$.

Solución. Paso 1: Determinar la pendiente requerida.

La recta $y = 3x + 1$ tiene pendiente $m = 3$. Como la recta tangente debe ser paralela, debe tener la misma pendiente.

Paso 2: Calcular la pendiente de la curva paramétrica.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-4}{2} = t-2$$

Paso 3: Igualar pendientes y encontrar t.

$$t - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 5$$

Paso 4: Encontrar el punto de tangencia.

$$x = 2(5) - 5 = 10 - 5 = 5, \quad y = (5)^2 - 4(5) + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

Punto de tangencia: $(5, 8)$

Paso 5: Escribir la ecuación de la recta tangente.

Usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 8 = 3(x - 5)$$
$$y - 8 = 3x - 15$$
$$y = 3x - 7$$

Respuesta final: $y = 3x - 7$

14. Verifique que la curva dada por $x = -\frac{2}{\pi} + \cos\theta$, $y = -\frac{2\theta}{\pi} + \operatorname{sen}\theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se interseca a sí misma. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en el punto de intersección.

Solución. Paso 1: Verificar que la curva se interseca a sí misma.

Para que la curva se interseque a sí misma, debe existir $\theta_1 \neq \theta_2$ tal que:

$$x(\theta_1) = x(\theta_2) \quad \text{y} \quad y(\theta_1) = y(\theta_2)$$

De la ecuación para x:

$$-\frac{2}{\pi} + \cos\theta_1 = -\frac{2}{\pi} + \cos\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

Esto implica que $\theta_2 = \pm\theta_1$.

Paso 2: Considerar $\theta_2 = -\theta_1$ (con $\theta_1 \neq 0$).

De la ecuación para y:

$$-\frac{2\theta_1}{\pi} + \operatorname{sen}\theta_1 = -\frac{2(-\theta_1)}{\pi} + \operatorname{sen}(-\theta_1)$$

$$-\frac{2\theta_1}{\pi} + \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{2\theta_1}{\pi} - \operatorname{sen}\theta_1$$

$$2\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{4\theta_1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{2\theta_1}{\pi}$$

Paso 3: Encontrar una solución no trivial.

Probamos $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi} = 1$$

¡Funciona! También $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ funciona.

Tomemos $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Paso 4: Encontrar el punto de intersección.

$$x = -\frac{2}{\pi} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} + 0 = -\frac{2}{\pi}$$

$$y = -\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$

Punto de intersección: $\left(-\frac{2}{\pi}, 0\right)$

Paso 5: Calcular pendientes en el punto de intersección.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-\frac{2}{\pi} + \cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{2}{\pi} + 0}{-1} = \frac{2}{\pi}$$

Para $\theta = -\frac{\pi}{2}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{2}{\pi} + 0}{-(-1)} = \frac{-\frac{2}{\pi}}{1} = -\frac{2}{\pi}$$

Paso 6: Escribir ecuaciones de las rectas tangentes.

Primera recta tangente (pendiente $\frac{2}{\pi}$):

$$y - 0 = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{2}{\pi}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$$

Segunda recta tangente (pendiente $-\frac{2}{\pi}$):

$$y - 0 = -\frac{2}{\pi}\left(x + \frac{2}{\pi}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}$$

Respuesta final: Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2} \quad \text{y} \quad y = -\frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}$$

En los problemas 15-18, determine los puntos sobre la curva dada en los cuales la recta tangente es horizontal o vertical. Graficar la curva.

15. $x = t^3 - t, \quad y = t^2$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas paramétricas.

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{3t^2 - 1}$$

Paso 2: Encontrar tangentes horizontales.

Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$\frac{2t}{3t^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Punto correspondiente:

$$x = 0^3 - 0 = 0, \quad y = 0^2 = 0$$

Punto: $(0, 0)$

Paso 3: Encontrar tangentes verticales.

Tangente vertical cuando $\frac{dx}{dt} = 0$ (denominador cero):

$$3t^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

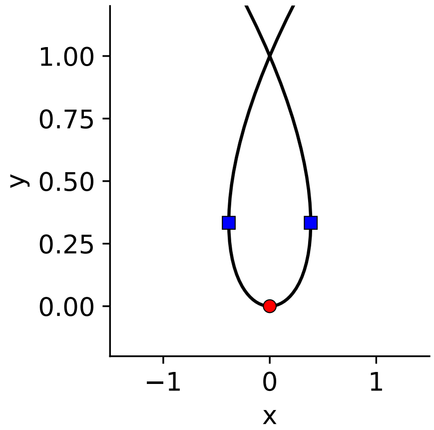
$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Para $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$x = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad y = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Respuesta final:

- Tangente horizontal en $(0, 0)$
- Tangentes verticales en $\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$



16. $x = \frac{1}{8}t^3 + 1, \quad y = t^2 - 2t$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas paramétricas.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{8}t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-2}{\frac{3}{8}t^2} = \frac{16(t-1)}{3t^2}$$

Paso 2: Encontrar tangentes horizontales.

Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$\frac{16(t-1)}{3t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

Punto correspondiente:

$$x = \frac{1}{8}(1)^3 + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}, \quad y = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

Punto: $\left(\frac{9}{8}, -1\right)$

Paso 3: Encontrar tangentes verticales.

Tangente vertical cuando $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$\frac{3}{8}t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Punto correspondiente:

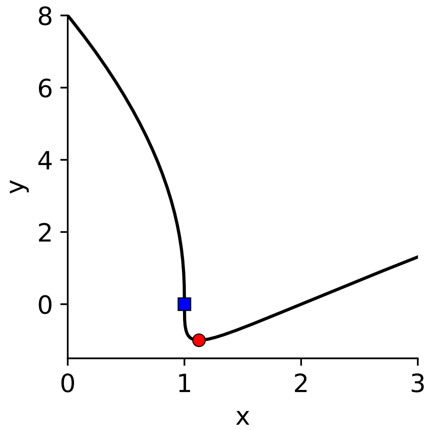
$$x = \frac{1}{8}(0)^3 + 1 = 1, \quad y = (0)^2 - 2(0) = 0$$

Punto: $(1, 0)$

Respuesta final:

- Tangente horizontal en $\left(\frac{9}{8}, -1\right)$

- Tangente vertical en $(1, 0)$



17. $x = t - 1, \quad y = t^3 - 3t^2$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas paramétricas.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 6t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 3t^2 - 6t$$

Paso 2: Encontrar tangentes horizontales.

Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$3t^2 - 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad 3t(t-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0, 2$$

Para $t = 0$:

$$x = 0 - 1 = -1, \quad y = 0^3 - 3(0)^2 = 0$$

Para $t = 2$:

$$x = 2 - 1 = 1, \quad y = (2)^3 - 3(2)^2 = 8 - 12 = -4$$

Paso 3: Encontrar tangentes verticales.

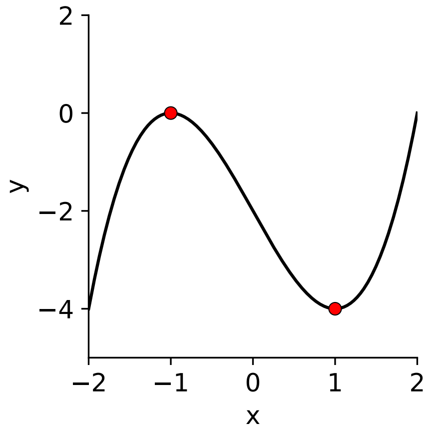
Tangente vertical cuando $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \neq 0 \quad \text{para todo } t$$

No hay tangentes verticales.

Respuesta final:

- Tangentes horizontales en $(-1, 0)$ y $(1, -4)$
- No hay tangentes verticales



18. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas paramétricas.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -3 \operatorname{sen} 3t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-3 \operatorname{sen} 3t}{\cos t}$$

Paso 2: Encontrar tangentes horizontales.

Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$\frac{-3 \operatorname{sen} 3t}{\cos t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 3t = 0$$

$$3t = n\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{n\pi}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

Pero excluimos valores donde $\cos t = 0$ (denominador cero).

Para $t = 0, \pi, 2\pi$: $\cos t \neq 0$, son válidos.

Puntos:

- $t = 0$: $x = 0, y = 1 \rightarrow (0, 1)$
- $t = \pi$: $x = 0, y = \cos 3\pi = -1 \rightarrow (0, -1)$
- $t = 2\pi$: $x = 0, y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Paso 3: Encontrar tangentes verticales.

Tangente vertical cuando $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Para $t = \frac{\pi}{2}$:

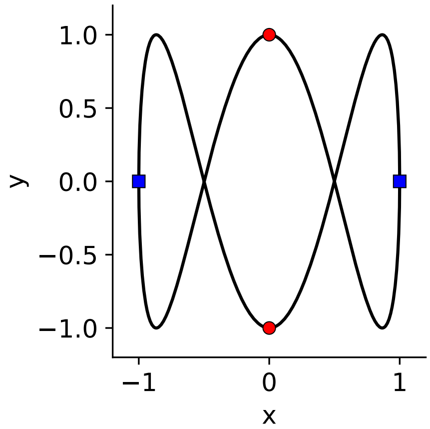
$$x = 1, \quad y = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Para $t = \frac{3\pi}{2}$:

$$x = -1, \quad y = \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Respuesta final:

- Tangentes horizontales en $(0, 1)$ y $(0, -1)$
- Tangentes verticales en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$



En los problemas 19-22, encuentre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$

19. $x = 3t^2, \quad y = 6t^3$

Solución. Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = 18t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{18t^2}{6t} = 3t$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(3t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{6t} = \frac{1}{2t}$$

Paso 3: Calcular tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{6t} = -\frac{1}{12t^3}$$

Respuesta final:

$$\frac{dy}{dx} = 3t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2t}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{12t^3}$$

20. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$

Solución. Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\cot t$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(-\cot t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\csc^2 t}{-\operatorname{sen} t} = -\csc^3 t$$

Paso 3: Calcular tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(-\csc^3 t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\csc^3 t \cot t}{-\operatorname{sen} t} = -3\csc^4 t \cot t$$

Respuesta final:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\csc^3 t, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -3\csc^4 t \cot t$$

21. $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t} + e^{3t}$

Solución. Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} + 3e^{3t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2e^{2t} + 3e^{3t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t} - 3e^{4t}$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(-2e^{3t} - 3e^{4t})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-6e^{3t} - 12e^{4t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t} + 12e^{5t}$$

Paso 3: Calcular tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(6e^{4t} + 12e^{5t})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{24e^{4t} + 60e^{5t}}{-e^{-t}} = -24e^{5t} - 60e^{6t}$$

Respuesta final:

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{3t} - 3e^{4t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6e^{4t} + 12e^{5t}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -24e^{5t} - 60e^{6t}$$

22. $x = \frac{1}{2}t^2 + t, \quad y = \frac{1}{2}t^2 - t$

Solución. Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = t+1, \quad \frac{dy}{dt} = t-1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t-1}{t+1}$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(1)(t+1)-(t-1)(1)}{(t+1)^2}}{t+1} = \frac{2}{(t+1)^3}$$

Paso 3: Calcular tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{(t+1)^3}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{6}{(t+1)^4}}{t+1} = -\frac{6}{(t+1)^5}$$

Respuesta final:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t-1}{t+1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(t+1)^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{(t+1)^5}$$

23. Emplee d^2y/dx^2 para determinar los intervalos del parámetro para el cual la curva del problema 16 es cóncava hacia arriba y los intervalos para los cuales resulta cóncava hacia abajo.

Solución. Recordemos la curva del problema 16:

$$x = \frac{1}{8}t^3 + 1, \quad y = t^2 - 2t$$

Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{8}t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t-2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-2}{\frac{3}{8}t^2} = \frac{16(t-1)}{3t^2}$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{16(t-1)}{3t^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Calculamos la derivada del numerador:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{16(t-1)}{3t^2}\right) = \frac{16}{3}\cdot\frac{(1)t^2-(t-1)(2t)}{t^4} = \frac{16}{3}\cdot\frac{t^2-2t^2+2t}{t^4} = \frac{16}{3}\cdot\frac{-t^2+2t}{t^4}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{-t+2}{t^3} = \frac{16(2-t)}{3t^3}$$

Ahora dividimos por $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{8}t^2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{16(2-t)}{3t^3}}{\frac{3}{8}t^2} = \frac{16(2-t)}{3t^3} \cdot \frac{8}{3t^2} = \frac{128(2-t)}{9t^5}$$

Paso 3: Analizar concavidad.

La concavidad está determinada por el signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{128(2-t)}{9t^5}$$

Analizamos signos:

- Para $t < 0$: $t^5 < 0$, $(2-t) > 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (cóncava hacia abajo)
- Para $0 < t < 2$: $t^5 > 0$, $(2-t) > 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (cóncava hacia arriba)
- Para $t > 2$: $t^5 > 0$, $(2-t) < 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (cóncava hacia abajo)

Respuesta final:

- Cóncava hacia arriba: $0 < t < 2$
- Cóncava hacia abajo: $t < 0$ y $t > 2$

24. Emplee d^2y/dx^2 para determinar si la curva dada por $x = 2t+5$, $y = 2t^3 + 6t^2 + 4t$ tiene algún punto de inflexión.

Solución. Paso 1: Calcular primera derivada.

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 + 12t + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6t^2+12t+4}{2} = 3t^2 + 6t + 2$$

Paso 2: Calcular segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}(3t^2+6t+2)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t+6}{2} = 3t+3$$

Paso 3: Analizar puntos de inflexión.

Los puntos de inflexión ocurren cuando $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ y cambia de signo:

$$3t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

Para $t < -1$: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (cóncava hacia abajo)
Para $t > -1$: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (cóncava hacia arriba)

Hay cambio de concavidad en $t = -1$.

Paso 4: Encontrar el punto correspondiente.

$$x = 2(-1) + 5 = 3, \quad y = 2(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1) = -2 + 6 - 4 = 0$$

Respuesta final: Sí, hay un punto de inflexión en $(3, 0)$

En los problemas 25-30, encuentre la longitud de la curva dada.

25. $x = \frac{5}{3}t^3 + 2$, $y = 4t^3 + 6$; $0 \le t \le 2$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas.

$$\frac{dx}{dt} = 5t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 12t^2$$

Paso 2: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(5t^2)^2 + (12t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{25t^4 + 144t^4}\, dt = \int_0^2 \sqrt{169t^4}\, dt = \int_0^2 13t^2\, dt$$

Paso 3: Evaluar la integral.

$$L = 13\int_0^2 t^2\, dt = 13\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 13 \cdot \frac{8}{3} = \frac{104}{3}$$

Respuesta final: $L = \dfrac{104}{3}$

26. $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$; $0 \le t \le \sqrt{3}$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas.

$$\frac{dx}{dt} = t^2, \quad \frac{dy}{dt} = t$$

Paso 2: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2)^2 + (t)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + t^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2(t^2 + 1)}\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{t^2 + 1}\, dt$$

Paso 3: Resolver la integral por sustitución.

Sea $u = t^2 + 1$, entonces $du = 2t\,dt$, $t\,dt = \frac{du}{2}$

Cuando $t = 0$, $u = 1$ Cuando $t = \sqrt{3}$, $u = 3 + 1 = 4$

$$L = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^4 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^4$$
$$= \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{3}(4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

Respuesta final: $L = \dfrac{7}{3}$

27. $x = e^t \operatorname{sen} t, \quad y = e^t \cos t;\ 0 \leq t \leq \pi$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas usando regla del producto.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t = e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

Paso 2: Calcular suma de cuadrados.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}[(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2]$$
$$= e^{2t}[(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t\cos t + \cos^2 t) + (\cos^2 t - 2\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t)]$$
$$= e^{2t}[2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t] = e^{2t}[2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)] = 2e^{2t}$$

Paso 3: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi e^t\,dt$$
$$= \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$$

Respuesta final: $L = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$

28. Un arco de la cicloide:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas.

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a\operatorname{sen}\theta$$

Paso 2: Calcular suma de cuadrados.

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= a^2[1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta] = a^2[1 - 2\cos\theta + 1] = a^2[2 - 2\cos\theta]$$
$$= 2a^2(1 - \cos\theta)$$

Paso 3: Simplificar usando identidad trigonométrica.

Usamos $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2a^2 \cdot 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) = 4a^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$$

Paso 4: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2a|\operatorname{sen}(\theta/2)|\, d\theta$$

Para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \theta/2 \leq \pi$, y $\operatorname{sen}(\theta/2) \geq 0$, así que:

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta$$

Paso 5: Resolver la integral.

Sea $u = \theta/2$, entonces $du = d\theta/2$, $d\theta = 2du$

Cuando $\theta = 0$, $u = 0$ Cuando $\theta = 2\pi$, $u = \pi$

$$L = 2a\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \cdot 2du = 4a\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du = 4a\left[-\cos u\right]_0^{\pi}$$

$$= 4a[-\cos\pi + \cos 0] = 4a[-(-1) + 1] = 4a(1 + 1) = 8a$$

Respuesta final: $L = 8a$

29. Un arco de la hipocicloide de cuatro cúspides:

$$x = b\cos^3\theta, \quad y = b\operatorname{sen}^3\theta; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas.

$$\frac{dx}{d\theta} = 3b\cos^2\theta(-\operatorname{sen}\theta) = -3b\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3b\operatorname{sen}^2\theta(\cos\theta) = 3b\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$$

Paso 2: Calcular suma de cuadrados.

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9b^2\cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta + 9b^2\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta$$

$$= 9b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 9b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

Paso 3: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9b^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 3b|\cos\theta \operatorname{sen}\theta|\, d\theta$$

Para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\cos\theta \geq 0$, $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, así que:

$$L = 3b \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Paso 4: Resolver la integral.

Usamos $\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$:

$$L = 3b \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = \frac{3b}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

Sea $u = 2\theta$, entonces $du = 2d\theta$, $d\theta = du/2$

Cuando $\theta = 0$, $u = 0$ Cuando $\theta = \pi/2$, $u = \pi$

$$L = \frac{3b}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{2} = \frac{3b}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du = \frac{3b}{4}[-\cos u]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3b}{4}[-\cos\pi + \cos 0] = \frac{3b}{4}[-(-1)+1] = \frac{3b}{4}(2) = \frac{3b}{2}$$

Respuesta final: $L = \dfrac{3b}{2}$

30. Un arco de la epicicloide de tres cúspides:

$$x = 4a\cos\theta - a\cos 4\theta, \quad y = 4a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen} 4\theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi/3$$

Solución. Paso 1: Calcular derivadas.

$$\frac{dx}{d\theta} = -4a\operatorname{sen}\theta + 4a\operatorname{sen} 4\theta = 4a(\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 4a\cos\theta - 4a\cos 4\theta = 4a(\cos\theta - \cos 4\theta)$$

Paso 2: Calcular suma de cuadrados.

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 16a^2[(\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \cos 4\theta)^2]$$

Desarrollamos:

$$= 16a^2[\operatorname{sen}^2 4\theta - 2\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 4\theta + \cos^2 4\theta]$$

$$= 16a^2[(\operatorname{sen}^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 2(\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\cos 4\theta)]$$

$$= 16a^2[1 + 1 - 2\cos(4\theta - \theta)] = 16a^2[2 - 2\cos 3\theta] = 32a^2(1 - \cos 3\theta)$$

Paso 3: Simplificar usando identidad trigonométrica.

Usamos $1 - \cos 3\theta = 2\,\mathrm{sen}^2(3\theta/2)$:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 32a^2 \cdot 2\,\mathrm{sen}^2(3\theta/2) = 64a^2\,\mathrm{sen}^2(3\theta/2)$$

Paso 4: Aplicar fórmula de longitud de arco.

$$L = \int_0^{2\pi/3} \sqrt{64a^2\,\mathrm{sen}^2(3\theta/2)}\,d\theta = \int_0^{2\pi/3} 8a|\,\mathrm{sen}(3\theta/2)|\,d\theta$$

Para $0 \le \theta \le 2\pi/3$, $0 \le 3\theta/2 \le \pi$, y $\mathrm{sen}(3\theta/2) \ge 0$, así que:

$$L = 8a \int_0^{2\pi/3} \mathrm{sen}(3\theta/2)\,d\theta$$

Paso 5: Resolver la integral.

Sea $u = 3\theta/2$, entonces $du = \frac{3}{2}d\theta$, $d\theta = \frac{2}{3}du$

Cuando $\theta = 0$, $u = 0$ Cuando $\theta = 2\pi/3$, $u = \pi$

$$L = 8a \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,u \cdot \frac{2}{3}du = \frac{16a}{3} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,u\,du = \frac{16a}{3}\left[-\cos u\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{16a}{3}[-\cos\pi + \cos 0] = \frac{16a}{3}[-(-1) + 1] = \frac{16a}{3}(2) = \frac{32a}{3}$$

Respuesta final: $L = \dfrac{32a}{3}$

2.4 Sistema de coordenadas polares

En los problemas 1-6, grafique el punto con las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = 3$ (distancia desde el origen)
- $\theta = \pi$ (ángulo de 180° desde el eje polar positivo)

Ubicación: El punto está a 3 unidades del origen en la dirección del ángulo π, es decir, sobre el eje x negativo.

Coordenadas cartesianas:

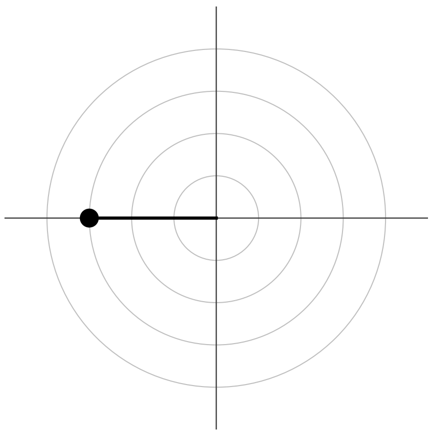
$$x = r\cos\theta = 3\cos\pi = 3(-1) = -3$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\pi = 3(0) = 0$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(-3, 0)$.

Gráfico: El punto se encuentra sobre el eje x negativo, a 3 unidades del origen.

Representación gráfica:



2. $(-2, -\pi/2)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = -2$ (distancia negativa desde el origen)
- $\theta = -\pi/2$ (ángulo de -90° desde el eje polar positivo)

Cuando $r < 0$, el punto está en la dirección opuesta al ángulo dado.

Ubicación: Como $r = -2$, el punto está a 2 unidades del origen en la dirección opuesta a $-\pi/2$, es decir, en el ángulo $-\pi/2 + \pi = \pi/2$.

Coordenadas cartesianas:

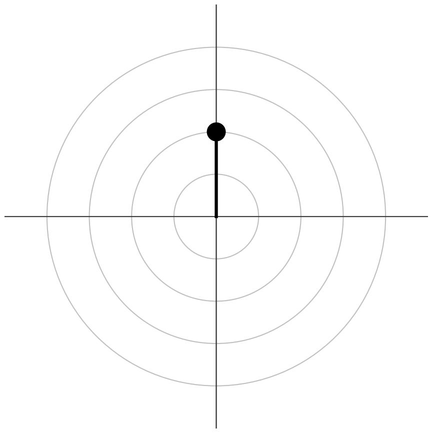
$$x = r\cos\theta = -2\cos(-\pi/2) = -2(0) = 0$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = -2\,\mathrm{sen}(-\pi/2) = -2(-1) = 2$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(0, 2)$.

Gráfico: El punto se encuentra sobre el eje y positivo, a 2 unidades del origen.

Representación gráfica:



3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = -\frac{1}{2}$ (distancia negativa desde el origen)
- $\theta = \pi/2$ (ángulo de 90° desde el eje polar positivo)

Ubicación: Como $r = -\frac{1}{2}$, el punto está a $\frac{1}{2}$ de unidad del origen en la dirección opuesta a $\pi/2$, es decir, sobre el eje y negativo.

Coordenadas cartesianas:

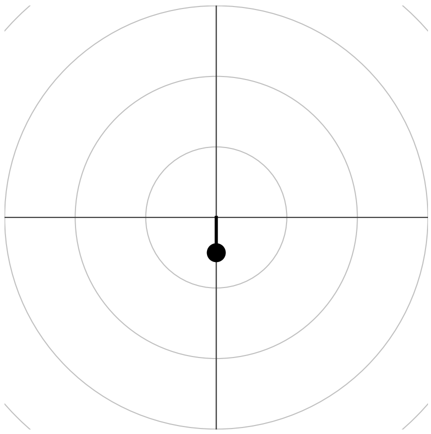
$$x = r\cos\theta = -\frac{1}{2}\cos(\pi/2) = -\frac{1}{2}(0) = 0$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\pi/2) = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(0, -\frac{1}{2})$.

Gráfico: El punto se encuentra sobre el eje y negativo, a $\frac{1}{2}$ de unidad del origen.

Representación gráfica:



4. $(-1, \pi/6)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = -1$ (distancia negativa desde el origen)
- $\theta = \pi/6$ (ángulo de 30° desde el eje polar positivo)

Ubicación: Como $r = -1$, el punto está a 1 unidad del origen en la dirección opuesta a $\pi/6$, es decir, en el ángulo $\pi/6 + \pi = 7\pi/6$.

Coordenadas cartesianas:

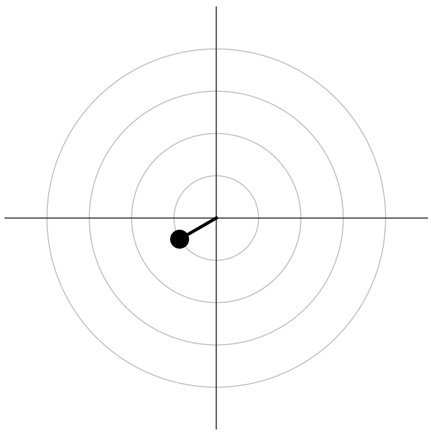
$$x = r\cos\theta = -1\cos(\pi/6) = -1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = -1\,\mathrm{sen}(\pi/6) = -1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Gráfico: El punto se encuentra en el tercer cuadrante.

Representación gráfica:



5. $(-4, -\pi/6)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = -4$ (distancia negativa desde el origen)
- $\theta = -\pi/6$ (ángulo de -30° desde el eje polar positivo)

Ubicación: Como $r = -4$, el punto está a 4 unidades del origen en la dirección opuesta a $-\pi/6$, es decir, en el ángulo $-\pi/6 + \pi = 5\pi/6$.

Coordenadas cartesianas:

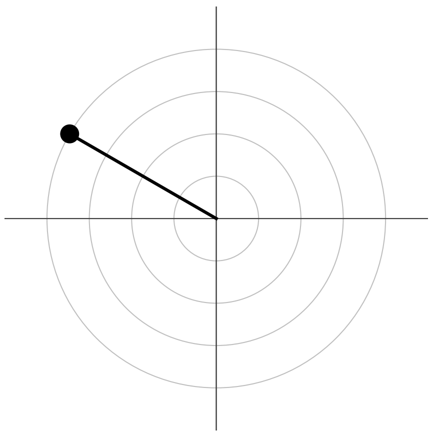
$$x = r\cos\theta = -4\cos(-\pi/6) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -4\operatorname{sen}(-\pi/6) = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(-2\sqrt{3}, 2)$.

Gráfico: El punto se encuentra en el segundo cuadrante.

Representación gráfica:



6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

Solución. Análisis del punto:

- $r = \frac{2}{3}$ (distancia desde el origen)
- $\theta = 7\pi/4$ (ángulo de 315° desde el eje polar positivo)

Ubicación: El punto está a $\frac{2}{3}$ de unidad del origen en la dirección del ángulo $7\pi/4$, que está en el cuarto cuadrante.

Coordenadas cartesianas:

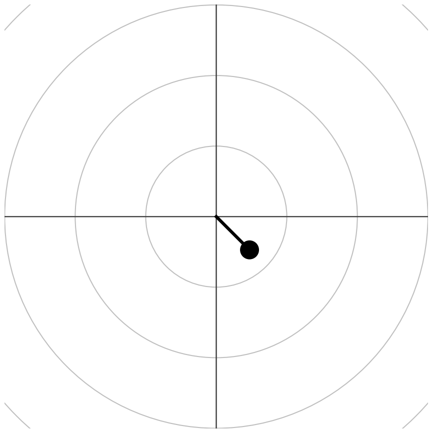
$$x = r\cos\theta = \frac{2}{3}\cos(7\pi/4) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(7\pi/4) = \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

El punto en coordenadas cartesianas es $(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3})$.

Gráfico: El punto se encuentra en el cuarto cuadrante.

Representación gráfica:



En los problemas 7 a 12, encuentre coordenadas polares alternas que satisfagan (a) $r > 0, \theta < 0$ (b) $r > 0, \theta > 2\pi$ (c) $r < 0, \theta > 0$ (d) $r < 0, \theta < 0$

para cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 2$, $\theta = 3\pi/4$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$$\theta = 3\pi/4 - 2\pi = 3\pi/4 - 8\pi/4 = -5\pi/4$$

$$(2, -5\pi/4)$$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$$\theta = 3\pi/4 + 2\pi = 3\pi/4 + 8\pi/4 = 11\pi/4$$

$$(2, 11\pi/4)$$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$$r = -2, \quad \theta = 3\pi/4 + \pi = 3\pi/4 + 4\pi/4 = 7\pi/4$$

$$(-2, 7\pi/4)$$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$$r = -2, \quad \theta = 3\pi/4 - \pi = 3\pi/4 - 4\pi/4 = -\pi/4$$

$$(-2, -\pi/4)$$

8. $(5, \pi/2)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 5$, $\theta = \pi/2$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$\theta = \pi/2 - 2\pi = \pi/2 - 4\pi/2 = -3\pi/2$

$(5, -3\pi/2)$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$\theta = \pi/2 + 2\pi = \pi/2 + 4\pi/2 = 5\pi/2$

$(5, 5\pi/2)$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$r = -5, \quad \theta = \pi/2 + \pi = \pi/2 + 2\pi/2 = 3\pi/2$

$(-5, 3\pi/2)$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$r = -5, \quad \theta = \pi/2 - \pi = \pi/2 - 2\pi/2 = -\pi/2$

$(-5, -\pi/2)$

9. $(4, \pi/3)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 4$, $\theta = \pi/3$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$\theta = \pi/3 - 2\pi = \pi/3 - 6\pi/3 = -5\pi/3$

$(4, -5\pi/3)$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$\theta = \pi/3 + 2\pi = \pi/3 + 6\pi/3 = 7\pi/3$

$(4, 7\pi/3)$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$r = -4, \quad \theta = \pi/3 + \pi = \pi/3 + 3\pi/3 = 4\pi/3$

$(-4, 4\pi/3)$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$r = -4, \quad \theta = \pi/3 - \pi = \pi/3 - 3\pi/3 = -2\pi/3$

$(-4, -2\pi/3)$

10. $(3, \pi/4)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 3$, $\theta = \pi/4$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$\theta = \pi/4 - 2\pi = \pi/4 - 8\pi/4 = -7\pi/4$

$(3, -7\pi/4)$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$\theta = \pi/4 + 2\pi = \pi/4 + 8\pi/4 = 9\pi/4$

$(3, 9\pi/4)$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$r = -3, \quad \theta = \pi/4 + \pi = \pi/4 + 4\pi/4 = 5\pi/4$

$(-3, 5\pi/4)$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$r = -3, \quad \theta = \pi/4 - \pi = \pi/4 - 4\pi/4 = -3\pi/4$

$(-3, -3\pi/4)$

11. $(1, \pi/6)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 1$, $\theta = \pi/6$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$\theta = \pi/6 - 2\pi = \pi/6 - 12\pi/6 = -11\pi/6$

$(1, -11\pi/6)$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$\theta = \pi/6 + 2\pi = \pi/6 + 12\pi/6 = 13\pi/6$

$(1, 13\pi/6)$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$r = -1, \quad \theta = \pi/6 + \pi = \pi/6 + 6\pi/6 = 7\pi/6$

$(-1, 7\pi/6)$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$r = -1, \quad \theta = \pi/6 - \pi = \pi/6 - 6\pi/6 = -5\pi/6$

$(-1, -5\pi/6)$

12. $(3, 7\pi/6)$

Solución. Coordenadas originales: $r = 3$, $\theta = 7\pi/6$

(a) $r > 0, \theta < 0$:

$$\theta = 7\pi/6 - 2\pi = 7\pi/6 - 12\pi/6 = -5\pi/6$$

$$(3, -5\pi/6)$$

(b) $r > 0, \theta > 2\pi$:

$$\theta = 7\pi/6 + 2\pi = 7\pi/6 + 12\pi/6 = 19\pi/6$$

$$(3, 19\pi/6)$$

(c) $r < 0, \theta > 0$:

$$r = -3, \quad \theta = 7\pi/6 + \pi = 7\pi/6 + 6\pi/6 = 13\pi/6$$

$$(-3, 13\pi/6)$$

(d) $r < 0, \theta < 0$:

$$r = -3, \quad \theta = 7\pi/6 - \pi = 7\pi/6 - 6\pi/6 = \pi/6$$

$$(-3, \pi/6)$$

En los problemas 13-18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$

Solución. Coordenadas polares: $r = \frac{1}{2}$, $\theta = 2\pi/3$

Fórmulas de conversión:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Cálculo:

$$x = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Respuesta: $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

14. $(-1, 7\pi/4)$

Solución. Coordenadas polares: $r = -1$, $\theta = 7\pi/4$

Cálculo:

$$x = -1 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Respuesta: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

15. $(-6, -\pi/3)$

Solución. Coordenadas polares: $r = -6$, $\theta = -\pi/3$

Cálculo:

$$x = -6 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$y = -6 \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

Respuesta: $(-3, 3\sqrt{3})$

16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$

Solución. Coordenadas polares: $r = \sqrt{2}$, $\theta = 11\pi/6$

Cálculo:

$$x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Respuesta: $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. $(4, 5\pi/4)$

Solución. Coordenadas polares: $r = 4$, $\theta = 5\pi/4$

Cálculo:

$$x = 4 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$y = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

Respuesta: $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

18. $(-5, \pi/2)$

Solución. Coordenadas polares: $r = -5$, $\theta = \pi/2$

Cálculo:

$$x = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5 \cdot 0 = 0$$

$$y = -5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5 \cdot 1 = -5$$

Respuesta: $(0, -5)$

En los problemas 19-24, determine las coordenadas polares que satisfagan (a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ (b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$

para cada punto con las coordenadas rectangulares indicadas.

19. $(-2, -2)$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x = -2$, $y = -2$

Cálculo de r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Cálculo de θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

El punto está en el tercer cuadrante, por lo tanto:

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

(a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$(2\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$$

(b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$r = -2\sqrt{2}, \quad \theta = -\frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{4}$$

$$(-2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

20. $(0,-4)$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x=0$, $y=-4$

Cálculo de r:

$$r=\sqrt{0^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$$

Cálculo de θ: El punto está sobre el eje y negativo, por lo tanto:

$$\theta=-\frac{\pi}{2}$$

(a) $r>0, -\pi<\theta\leq\pi$:

$$(4,-\frac{\pi}{2})$$

(b) $r<0, -\pi<\theta\leq\pi$:

$$r=-4,\quad \theta=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$$

$$(-4,\frac{\pi}{2})$$

21. $(1,-\sqrt{3})$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x=1$, $y=-\sqrt{3}$

Cálculo de r:

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

Cálculo de θ:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

El punto está en el cuarto cuadrante, por lo tanto:

$$\theta=-\frac{\pi}{3}$$

(a) $r>0, -\pi<\theta\leq\pi$:

$$(2,-\frac{\pi}{3})$$

(b) $r<0, -\pi<\theta\leq\pi$:

$$r=-2,\quad \theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$(-2,\frac{2\pi}{3})$$

22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt{2}$

Cálculo de r:

$$r = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Cálculo de θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

El punto está en el primer cuadrante, por lo tanto:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

(a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$$

(b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$r = -2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$$

$$(-2\sqrt{2}, -\frac{5\pi}{6})$$

23. $(7, 0)$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x = 7$, $y = 0$

Cálculo de r:

$$r = \sqrt{7^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$$

Cálculo de θ: El punto está sobre el eje x positivo, por lo tanto:

$$\theta = 0$$

(a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$(7, 0)$$

(b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$r = -7, \quad \theta = 0 + \pi = \pi$$

$$(-7, \pi)$$

24. $(1, 2)$

Solución. Coordenadas rectangulares: $x = 1$, $y = 2$

Cálculo de r:

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Cálculo de θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

El punto está en el primer cuadrante, por lo tanto:

$$\theta = \arctan(2)$$

(a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$(\sqrt{5}, \arctan(2))$$

(b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$:

$$r = -\sqrt{5}, \quad \theta = \arctan(2) - \pi$$

$$(-\sqrt{5}, \arctan(2) - \pi)$$

En los problemas 25-30, dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicadas.

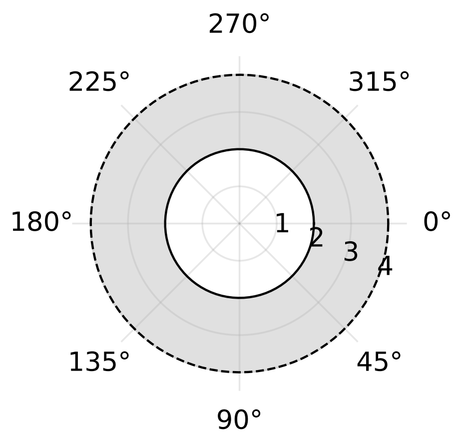
25. $2 \leq r < 4, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $2 \leq r < 4$: anillo circular entre radio 2 y radio 4 (incluye borde interior, excluye borde exterior)
- $0 \leq \theta \leq \pi$: semiplano superior (incluye los ejes)

La región corresponde al semicírculo superior del anillo entre radios 2 y 4.

Descripción: Semicírculo superior del anillo entre $r = 2$ y $r = 4$.



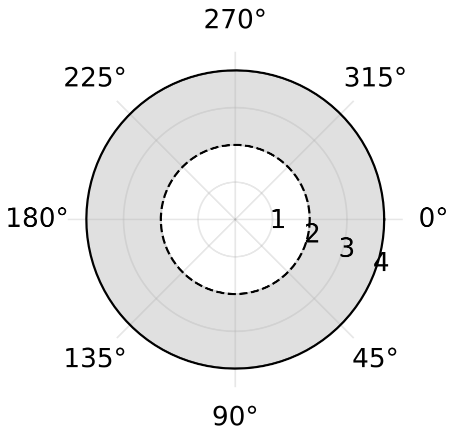
26. $2 < r \leq 4$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $2 < r \leq 4$: anillo circular entre radio 2 y radio 4 (excluye borde interior, incluye borde exterior)
- No hay restricción en θ: θ puede tomar cualquier valor de 0 a 2π

La región corresponde al anillo completo entre radios 2 y 4.

Descripción: Anillo completo entre $r = 2$ (excluido) y $r = 4$ (incluido).



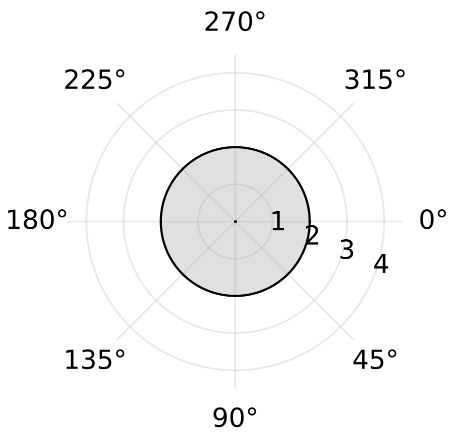
27. $0 \leq r \leq 2, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $0 \leq r \leq 2$: disco de radio 2 (incluye borde)
- $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$: semiplano derecho (incluye los ejes)

La región corresponde al semicírculo derecho de radio 2.

Descripción: Semicírculo derecho de radio 2.



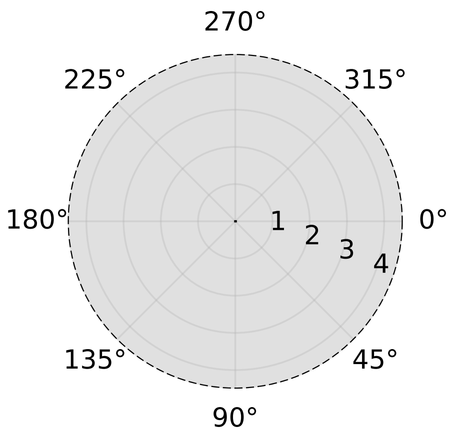
28. $r \geq 0, \quad \pi/4 < \theta < 3\pi/4$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $r \geq 0$: todo el plano (no hay restricción superior en r)
- $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$: sector angular entre 45° y 135° (excluye los bordes)

La región corresponde al sector angular infinito entre $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$.

Descripción: Sector angular infinito entre $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (excluyendo los bordes).



29. $-1 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $-1 \leq r \leq 1$: En coordenadas polares, r negativo significa que el punto está en la dirección opuesta.
- $0 \leq \theta \leq \pi/2$: Primer cuadrante (ángulos entre 0° y 90°)

Recordemos la propiedad fundamental de coordenadas polares:

$$(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$$

Por lo tanto:

- Para $0 \leq r \leq 1$: puntos en el primer cuadrante dentro del círculo unitario
- Para $-1 \leq r < 0$: equivalentes a $0 \leq r \leq 1$ con $\theta + \pi$, es decir, puntos en el tercer cuadrante

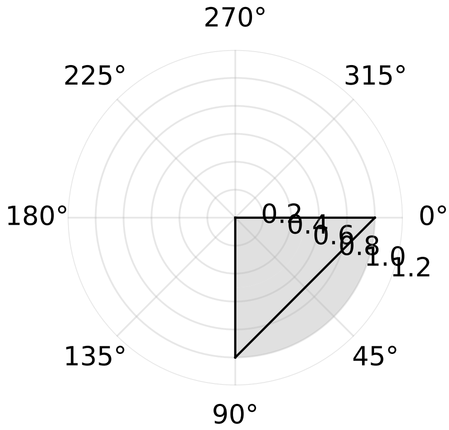
Pero como θ está restringido a $0 \leq \theta \leq \pi/2$, los puntos con $r < 0$ NO están en la región porque $\theta + \pi$ estaría fuera del rango permitido.

Por lo tanto, la región se reduce a:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Que corresponde al cuadrante del círculo unitario en el primer cuadrante.

Descripción: Cuadrante del círculo unitario en el primer cuadrante.



30. $-2 \leq r < 4, \quad \pi/3 \leq \theta \leq \pi$

Solución. Analizamos las condiciones:

- $-2 \leq r < 4$: Anillo entre radios 2 y 4, pero con r negativo incluido
- $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$: Sector angular entre 60° y 180°

Usando la propiedad fundamental:

$$(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$$

Descomponemos en dos casos:

Caso 1: $0 \leq r < 4$, $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$

- Sector del disco de radio 4 entre $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi$
- Excluye el borde exterior ($r < 4$)

Caso 2: $-2 \leq r < 0$, $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$

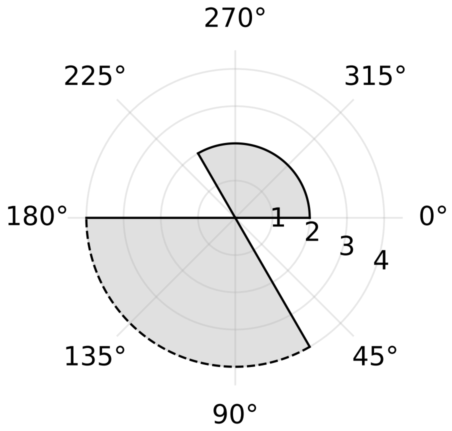
- Equivalente a $0 < r \leq 2$ con $\theta + \pi$
- $\theta + \pi$ estaría entre $\pi/3 + \pi = 4\pi/3$ y $\pi + \pi = 2\pi$
- Es decir, sector entre $\theta = 4\pi/3$ y $\theta = 2\pi$
- Incluye el borde interior ($r = 2$) para la parte negativa

La región final es la unión de:

1. Sector del disco de radio 4 entre $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi$ (excluyendo borde exterior)
2. Sector del anillo entre $r = 2$ y $r = 4$ entre $\theta = 4\pi/3$ y $\theta = 2\pi$ (incluyendo borde interior)

Descripción: Unión de dos sectores:

1. Sector del disco de radio 4 entre $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi$
2. Sector del anillo entre $r = 2$ y $r = 4$ entre $\theta = 4\pi/3$ y $\theta = 2\pi$



En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

31. $y = 5$

Solución. Usamos la relación entre coordenadas rectangulares y polares:

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Sustituyendo:

$$r \operatorname{sen} \theta = 5$$

Despejando r:

$$r = \frac{5}{\operatorname{sen} \theta} = 5 \csc \theta$$

Respuesta: $r = 5 \csc \theta$

32. $x + 1 = 0$

Solución. Usamos la relación:

$$x = r \cos \theta$$

Sustituyendo:

$$r \cos \theta + 1 = 0$$

Despejando r:

$$r \cos \theta = -1$$

$$r = -\frac{1}{\cos \theta} = -\sec \theta$$

Respuesta: $r = -\sec\theta$

33. $y = 7x$

Solución. Sustituimos $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $x = r\cos\theta$:

$$r\,\text{sen}\,\theta = 7(r\cos\theta)$$

$$r\,\text{sen}\,\theta = 7r\cos\theta$$

Dividiendo ambos lados por r (asumiendo $r \neq 0$):

$$\text{sen}\,\theta = 7\cos\theta$$

$$\tan\theta = 7$$

Respuesta: $\tan\theta = 7$

34. $3x + 8y + 6 = 0$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$:

$$3(r\cos\theta) + 8(r\,\text{sen}\,\theta) + 6 = 0$$

$$r(3\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta) + 6 = 0$$

Despejando r:

$$r(3\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta) = -6$$

$$r = -\frac{6}{3\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta}$$

Respuesta: $r = -\dfrac{6}{3\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta}$

35. $y^2 = -4x + 4$

Solución. Sustituimos $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $x = r\cos\theta$:

$$(r\,\text{sen}\,\theta)^2 = -4(r\cos\theta) + 4$$

$$r^2\,\text{sen}^2\,\theta = -4r\cos\theta + 4$$

Usando la identidad $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$r^2(1 - \cos^2\theta) = -4r\cos\theta + 4$$

$$r^2 - r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta - 4 = 0$$

Esta es la ecuación polar equivalente.

Respuesta: $r^2 - r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta - 4 = 0$

36. $x^2 - 12y - 36 = 0$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$(r\cos\theta)^2 - 12(r\,\mathrm{sen}\,\theta) - 36 = 0$$

$$r^2\cos^2\theta - 12r\,\mathrm{sen}\,\theta - 36 = 0$$

Usando $\cos^2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\,\theta$:

$$r^2(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta) - 12r\,\mathrm{sen}\,\theta - 36 = 0$$

$$r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 12r\,\mathrm{sen}\,\theta - 36 = 0$$

Respuesta: $r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 12r\,\mathrm{sen}\,\theta - 36 = 0$

37. $x^2 + y^2 = 36$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 36$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 36$$

Factorizando:

$$r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = 36$$

Usando la identidad $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$:

$$r^2 = 36$$

$$r = 6 \quad (\text{pues } r \geq 0)$$

Respuesta: $r = 6$

38. $x^2 - y^2 = 1$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$(r\cos\theta)^2 - (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 1$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 1$$

Factorizando:

$$r^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) = 1$$

Usando la identidad $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$:

$$r^2\cos 2\theta = 1$$

Respuesta: $r^2\cos 2\theta = 1$

39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, y notamos que:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

La ecuación se convierte en:

$$r^2 + r\cos\theta = r$$

$$r^2 + r\cos\theta - r = 0$$

$$r(r + \cos\theta - 1) = 0$$

Como $r = 0$ es solo el origen, la solución principal es:

$$r + \cos\theta - 1 = 0$$

$$r = 1 - \cos\theta$$

Respuesta: $r = 1 - \cos\theta$

40. $x^3 + y^3 - xy = 0$

Solución. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$:

$$(r\cos\theta)^3 + (r\operatorname{sen}\theta)^3 - (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$r^3\cos^3\theta + r^3\operatorname{sen}^3\theta - r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Factorizando r^2:

$$r^2(r\cos^3\theta + r\operatorname{sen}^3\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta) = 0$$

Como $r = 0$ es solo el origen, la solución principal es:

$$r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = \cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$r = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2\sec\theta$

Solución. Recordemos que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, entonces:

$$r = \frac{2}{\cos\theta}$$

Multiplicando ambos lados por $\cos\theta$:

$$r\cos\theta = 2$$

Pero $r\cos\theta = x$, por lo tanto:

$$x = 2$$

Respuesta: $x = 2$

42. $r\cos\theta = -4$

Solución. Como $r\cos\theta = x$, tenemos:

$$x = -4$$

Respuesta: $x = -4$

43. $r = 6\sec\theta$

Solución.

$$r = \frac{6}{\cos\theta}$$

$$r\cos\theta = 6$$

$$x = 6$$

Respuesta: $x = 6$

44. $2r = \tan\theta$

Solución.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

Entonces:

$$2r = \frac{y}{x}$$

Pero $r = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces:

$$2\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x}$$

Multiplicando ambos lados por x:

$$2x\sqrt{x^2+y^2} = y$$

Respuesta: $2x\sqrt{x^2+y^2} = y$

45. $r^2 = 4\sec\theta$

Solución.

$$r^2 = \frac{4}{\cos\theta}$$

$r^2 \cos\theta = 4$

Pero $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\cos\theta = x$, entonces:

$$(x^2 + y^2)\frac{x}{r} = 4$$

Mejor: $r^2 \cos\theta = r(r\cos\theta) = r \cdot x$, entonces:

$$rx = 4$$

$$r = \frac{4}{x}$$

Elevando al cuadrado:

$$r^2 = \frac{16}{x^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{16}{x^2}$$

Multiplicando por x^2:

$$x^4 + x^2y^2 = 16$$

Respuesta: $x^4 + x^2y^2 = 16$

46. $r^2 \cos 2\theta = 16$

Solución. Usamos la identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$:

$$r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 16$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 16$$

Pero $r\cos\theta = x$ y $r\operatorname{sen}\theta = y$, entonces:

$$x^2 - y^2 = 16$$

Respuesta: $x^2 - y^2 = 16$

47. $r + 5\sec\theta = 0$

Solución.

$$r + \frac{5}{\cos\theta} = 0$$

$$r = -\frac{5}{\cos\theta}$$

$$r\cos\theta = -5$$

$$x = -5$$

Respuesta: $x = -5$

48. $r = 2 + \cos\theta$

Solución. Multiplicamos ambos lados por r:

$$r^2 = 2r + r\cos\theta$$

Sustituimos $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\cos\theta = x$:

$$x^2 + y^2 = 2r + x$$

Pero $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces:

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + x$$

$$x^2 + y^2 - x = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Respuesta: $x^2 + y^2 - x = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

49. $r = \frac{2}{1+3\cos\theta}$

Solución. Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(1 + 3\cos\theta) = 2$$

$$r + 3r\cos\theta = 2$$

Sustituimos $r\cos\theta = x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 3x = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - 3x$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = 4 - 12x + 9x^2$$

$$0 = 4 - 12x + 9x^2 - x^2 - y^2$$

$$0 = 4 - 12x + 8x^2 - y^2$$

$$8x^2 - y^2 - 12x + 4 = 0$$

Respuesta: $8x^2 - y^2 - 12x + 4 = 0$

50. $r(4 - \sec\theta) = 10$

Solución.

$$4r - r\sec\theta = 10$$

$$4r - \frac{r}{\cos\theta} = 10$$

$$4r - \frac{1}{\cos\theta}r = 10$$

Multiplicando por $\cos\theta$:

$$4r\cos\theta - r = 10\cos\theta$$

Sustituimos $r\cos\theta = x$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$4x - \sqrt{x^2+y^2} = 10 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$4x\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) = 10x$$

$$4x\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2+10x$$

Respuesta: $4x\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2+10x$

51. $r = \frac{5}{3\cos\theta + 8\sec\theta}$

Solución. Simplificamos el denominador:

$$3\cos\theta + 8\sec\theta = 3\cos\theta + \frac{8}{\cos\theta} = \frac{3\cos^2\theta + 8}{\cos\theta}$$

Entonces:

$$r = \frac{5}{\frac{3\cos^2\theta+8}{\cos\theta}} = \frac{5\cos\theta}{3\cos^2\theta + 8}$$

$$r(3\cos^2\theta + 8) = 5\cos\theta$$

$$3r\cos^2\theta + 8r = 5\cos\theta$$

Pero $r\cos\theta = x$ y $\cos\theta = \frac{x}{r}$, entonces:

$$3r \cdot \frac{x^2}{r^2} + 8r = 5 \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{3x^2}{r} + 8r = \frac{5x}{r}$$

Multiplicando por r:

$$3x^2 + 8r^2 = 5x$$

Sustituimos $r^2 = x^2 + y^2$:

$$3x^2 + 8(x^2+y^2) = 5x$$

$$3x^2 + 8x^2 + 8y^2 = 5x$$

$$11x^2 + 8y^2 - 5x = 0$$

Respuesta: $11x^2 + 8y^2 - 5x = 0$

52. $r = 3 + 3\sec\theta$

Solución.

$$r = 3 + \frac{3}{\cos\theta}$$

Multiplicando por $\cos\theta$:

$$r\cos\theta = 3\cos\theta + 3$$

$$x = 3\cos\theta + 3$$

Pero $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, entonces:

$$x = 3 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3$$

$$x - 3 = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$(x-3)\sqrt{x^2+y^2} = 3x$$

Respuesta: $(x-3)\sqrt{x^2+y^2} = 3x$

2.5 Gráficas de ecuaciones polares

En los problemas 1-30, identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

1. $r = 6$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: La ecuación $r = 6$ representa todos los puntos que están a una distancia constante de 6 unidades del origen.

Características:

- Centro en el origen (polo)
- Radio = 6
- Círculo completo

Ecuación rectangular equivalente: $x^2 + y^2 = 36$

Gráfico: Círculo centrado en el origen con radio 6.

2. $r = -1$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: En coordenadas polares, $r = -1$ es equivalente a $r = 1$ porque el signo negativo indica la dirección opuesta, pero la distancia es la misma.

Características:

- Centro en el origen (polo)
- Radio = 1
- Círculo completo

Ecuación rectangular equivalente: $x^2 + y^2 = 1$

Gráfico: Círculo centrado en el origen con radio 1.

3. $\theta = \pi/3$

Solución. Identificación: Recta

Análisis: La ecuación $\theta = \pi/3$ representa todos los puntos que forman un ángulo constante de $\pi/3$ (60°) con el eje polar.

Características:

- Recta que pasa por el origen
- Pendiente = $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$

- Ángulo de 60° con el eje x positivo

Ecuación rectangular equivalente: $y = \sqrt{3}x$

Gráfico: Recta que pasa por el origen con pendiente $\sqrt{3}$.

4. $\theta = 5\pi/6$

Solución. Identificación: Recta

Análisis: La ecuación $\theta = 5\pi/6$ representa todos los puntos que forman un ángulo constante de $5\pi/6$ (150°) con el eje polar.

Características:

- Recta que pasa por el origen
- Pendiente = $\tan(5\pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- Ángulo de 150° con el eje x positivo (segundo cuadrante)

Ecuación rectangular equivalente: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$

Gráfico: Recta que pasa por el origen en el segundo cuadrante.

5. $r = 2\theta, \theta \leq 0$

Solución. Identificación: Espiral de Arquímedes

Análisis: La ecuación $r = 2\theta$ representa una espiral donde la distancia desde el origen aumenta linealmente con el ángulo.

Características:

- Espiral que se aleja del origen
- Para $\theta \leq 0$, la espiral gira en sentido horario
- Distancia aumenta a medida que $|\theta|$ aumenta

Gráfico: Espiral en el sentido horario que comienza en el origen.

6. $r = 3\theta, \theta \geq 0$

Solución. Identificación: Espiral de Arquímedes

Análisis: La ecuación $r = 3\theta$ representa una espiral donde la distancia desde el origen aumenta linealmente con el ángulo.

Características:

- Espiral que se aleja del origen
- Para $\theta \geq 0$, la espiral gira en sentido antihorario

- Distancia aumenta a medida que θ aumenta

Gráfico: Espiral en el sentido antihorario que comienza en el origen.

7. $r = 1 + \cos\theta$

Solución. Identificación: Cardioide

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 1$, que es un cardioide.

Características:

- Forma de corazón
- Punto singular en el origen
- Simétrica con respecto al eje x
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 1 + 1 = 2$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 1 - 1 = 0$

Gráfico: Cardioide con el lazo hacia la derecha.

8. $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$

Solución. Identificación: Cardioide

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a - b\operatorname{sen}\theta$ con $a = b = 5$, que es un cardioide.

Características:

- Forma de corazón
- Punto singular en el origen
- Simétrica con respecto al eje y
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 5 + 5 = 10$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 5 - 5 = 0$

Gráfico: Cardioide con el lazo hacia abajo.

9. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$

Solución. Identificación: Cardioide

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ con $a = b = 2$, que es un cardioide.

Características:

- Forma de corazón
- Punto singular en el origen

- Simétrica con respecto al eje y
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 2 + 2 = 4$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 2 - 2 = 0$

Gráfico: Cardioide con el lazo hacia arriba.

10. $2r = 1 - \cos\theta$

Solución. Identificación: Cardioide

Análisis: Reescribiendo la ecuación: $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta$, que tiene la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = \frac{1}{2}$.

Características:

- Forma de corazón
- Punto singular en el origen
- Simétrica con respecto al eje x
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Gráfico: Cardioide pequeño con el lazo hacia la izquierda.

11. $r = 1 - 2\cos\theta$

Solución. Identificación: Caracol con lazo interno (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = 1$, $b = -2$, donde $|b| > |a|$.

Características:

- Caracol con lazo interno
- Simétrica con respecto al eje x
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 1 + 2 = 3$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 1 - 2 = -1$ (lazo interno)

Gráfico: Caracol con lazo interno hacia la izquierda.

12. $r = 2 + 4\,\text{sen}\,\theta$

Solución. Identificación: Caracol con hoyo (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$ con $a = 2$, $b = 4$, donde $|b| > |a|$.

Características:

- Caracol con hoyo
- Simétrica con respecto al eje y
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 2 + 4 = 6$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 2 - 4 = -2$ (forma el hoyo)

Gráfico: Caracol con hoyo, orientado verticalmente.

13. $r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$

Solución. Identificación: Caracol (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ con $a = 4$, $b = -3$, donde $|a| > |b|$.

Características:

- Caracol sin lazo interno
- Simétrica con respecto al eje y
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 4 + 3 = 7$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 4 - 3 = 1$

Gráfico: Caracol ovalado orientado verticalmente.

14. $r = 3 + 2\cos\theta$

Solución. Identificación: Caracol (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = 3$, $b = 2$, donde $|a| > |b|$.

Características:

- Caracol sin lazo interno
- Simétrica con respecto al eje x
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 3 + 2 = 5$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 3 - 2 = 1$

Gráfico: Caracol ovalado orientado horizontalmente.

15. $r = 4 + \cos\theta$

Solución. Identificación: Caracol (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = 4$, $b = 1$, donde $|a| > |b|$.

Características:

- Caracol casi circular

- Simétrica con respecto al eje x
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 4 + 1 = 5$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 4 - 1 = 3$

Gráfico: Caracol casi circular orientado horizontalmente.

16. $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$

Solución. Identificación: Caracol (limaçon)

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ con $a = 4$, $b = -2$, donde $|a| > |b|$.

Características:

- Caracol sin lazo interno
- Simétrica con respecto al eje y
- Distancia máxima: $r_{\text{máx}} = 4 + 2 = 6$
- Distancia mínima: $r_{\text{mín}} = 4 - 2 = 2$

Gráfico: Caracol ovalado orientado verticalmente.

17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 4 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a\operatorname{sen}(n\theta)$ con $a = 1$, $n = 2$. Cuando n es par, la rosa tiene $2n = 4$ pétalos.

Características:

- 4 pétalos
- Longitud de pétalos = 1
- Simétrica con respecto al origen y ambos ejes
- Pétalos en los ángulos $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$

Gráfico: Rosa de 4 pétalos centrada en el origen.

18. $r = 3\operatorname{sen} 4\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 8 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a\operatorname{sen}(n\theta)$ con $a = 3$, $n = 4$. Cuando n es par, la rosa tiene $2n = 8$ pétalos.

Características:

- 8 pétalos

- Longitud de pétalos = 3
- Simétrica con respecto al origen y ambos ejes

Gráfico: Rosa de 8 pétalos centrada en el origen.

19. $r = 3\cos 3\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 3 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a\cos(n\theta)$ con $a = 3$, $n = 3$. Cuando n es impar, la rosa tiene $n = 3$ pétalos.

Características:

- 3 pétalos
- Longitud de pétalos = 3
- Simétrica con respecto al eje x
- Pétalos en los ángulos $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$

Gráfico: Rosa de 3 pétalos centrada en el origen.

20. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 3 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a\operatorname{sen}(n\theta)$ con $a = 2$, $n = 3$. Cuando n es impar, la rosa tiene $n = 3$ pétalos.

Características:

- 3 pétalos
- Longitud de pétalos = 2
- Simétrica con respecto al eje y
- Pétalos en los ángulos $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$

Gráfico: Rosa de 3 pétalos centrada en el origen.

21. $r = \cos 5\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 5 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a\cos(n\theta)$ con $a = 1$, $n = 5$. Cuando n es impar, la rosa tiene $n = 5$ pétalos.

Características:

- 5 pétalos

- Longitud de pétalos = 1
- Simétrica con respecto al eje x

Gráfico: Rosa de 5 pétalos centrada en el origen.

22. $r = 2 \operatorname{sen} 9\theta$

Solución. Identificación: Rosa de 9 pétalos

Análisis: La ecuación tiene la forma $r = a \operatorname{sen}(n\theta)$ con $a = 2$, $n = 9$. Cuando n es impar, la rosa tiene $n = 9$ pétalos.

Características:

- 9 pétalos
- Longitud de pétalos = 2
- Simétrica con respecto al eje y

Gráfico: Rosa de 9 pétalos centrada en el origen.

23. $r = 6 \cos\theta$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: Multiplicando ambos lados por r: $r^2 = 6r\cos\theta$. Sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\cos\theta = x$: $x^2 + y^2 = 6x$.

Características:

- Círculo con centro en (3, 0)
- Radio = 3
- Pasa por el origen

Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = 6x$ o $(x-3)^2 + y^2 = 9$

Gráfico: Círculo con centro en (3, 0) y radio 3.

24. $r = -2\cos\theta$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: Multiplicando ambos lados por r: $r^2 = -2r\cos\theta$. Sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\cos\theta = x$: $x^2 + y^2 = -2x$.

Características:

- Círculo con centro en (-1, 0)
- Radio = 1

- Pasa por el origen

Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = -2x$ o $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

Gráfico: Círculo con centro en (-1, 0) y radio 1.

25. $r = -3 \operatorname{sen} \theta$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: Multiplicando ambos lados por r: $r^2 = -3r \operatorname{sen} \theta$. Sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y $r \operatorname{sen} \theta = y$: $x^2 + y^2 = -3y$.

Características:

- Círculo con centro en (0, -1.5)
- Radio = 1.5
- Pasa por el origen

Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = -3y$ o $x^2 + (y + 1{,}5)^2 = 2{,}25$

Gráfico: Círculo con centro en (0, -1.5) y radio 1.5.

26. $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

Solución. Identificación: Círculo

Análisis: Multiplicando ambos lados por r: $r^2 = 5r \operatorname{sen} \theta$. Sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y $r \operatorname{sen} \theta = y$: $x^2 + y^2 = 5y$.

Características:

- Círculo con centro en (0, 2.5)
- Radio = 2.5
- Pasa por el origen

Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = 5y$ o $x^2 + (y - 2{,}5)^2 = 6{,}25$

Gráfico: Círculo con centro en (0, 2.5) y radio 2.5.

27. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

Solución. Identificación: Lemniscata

Análisis: La ecuación tiene la forma $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ con $a^2 = 4$, $a = 2$, que es una lemniscata.

Características:

- Forma de infinito
- Simétrica con respecto al origen

- Pasa por el origen
- Distancia máxima desde el origen $= 2$

Gráfico: Lemniscata orientada a 45° con los ejes.

28. $r^2 = 4\cos 2\theta$

Solución. Identificación: Lemniscata

Análisis: La ecuación tiene la forma $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ con $a^2 = 4$, $a = 2$, que es una lemniscata.

Características:

- Forma de infinito
- Simétrica con respecto a ambos ejes
- Pasa por el origen
- Distancia máxima desde el origen $= 2$

Gráfico: Lemniscata orientada horizontalmente.

29. $r^2 = -25\cos 2\theta$

Solución. Identificación: Lemniscata

Análisis: La ecuación tiene la forma $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ con $a^2 = 25$, $a = 5$, pero con signo negativo. Esto gira la lemniscata 45°.

Características:

- Forma de infinito
- Simétrica con respecto al origen
- Pasa por el origen
- Distancia máxima desde el origen $= 5$

Gráfico: Lemniscata orientada a 45° con los ejes.

30. $r^2 = -9\,\mathrm{sen}\, 2\theta$

Solución. Identificación: Lemniscata

Análisis: La ecuación tiene la forma $r^2 = a^2 \,\mathrm{sen}\, 2\theta$ con $a^2 = 9$, $a = 3$, pero con signo negativo. Esto gira la lemniscata 45°.

Características:

- Forma de infinito

- Simétrica con respecto a ambos ejes
- Pasa por el origen
- Distancia máxima desde el origen $= 3$

Gráfico: Lemniscata orientada horizontalmente.

31. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

Solución. Análisis de la región:

- $0 \leq r \leq 2$: Todos los puntos dentro de un círculo de radio 2 (incluyendo el centro y la frontera)
- $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$: Solo se consideran los ángulos desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$ (semiplano derecho)

Descripción: La región es un semicírculo de radio 2 en el semiplano derecho.

Gráfico: Características:

- Sector angular infinito
- Excluye los rayos límite ($\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$)
- Se extiende infinitamente en la dirección radial
- Corresponde al segundo cuadrante ampliado

32. $-1 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

Solución. Análisis de la región:

- $-1 \leq r \leq 1$: Todos los puntos dentro de un círculo de radio 1 (incluyendo el centro y la frontera)
- $0 \leq \theta \leq \pi/2$: Solo se consideran los ángulos desde 0 hasta $\pi/2$ (primer cuadrante)

Descripción: La región es un cuarto de círculo de radio 1 en el primer cuadrante.

Gráfico: Características:

- Cuarto de círculo en el primer cuadrante
- Radio 1
- Incluye el centro y toda la frontera
- Limitada a los ángulos entre 0 y $\pi/2$

33. $-2 \leq r < 4, \pi/3 \leq \theta \leq \pi$

Solución. Análisis de la región:

- $-2 \leq r < 4$: Interpretamos r negativo como dirección opuesta. Esto representa:
  - Para θ entre $\pi/3$ y π: r va desde -2 hasta 4
  - r negativo significa que vamos en dirección opuesta al ángulo dado
- $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$: Ángulos desde 60° hasta 180°

Descripción: La región es un sector de anillo que incluye:

- Para $0 \leq r < 4$: Sector circular entre $\pi/3$ y π
- Para $-2 \leq r < 0$: Equivale a $0 \leq r \leq 2$ en los ángulos opuestos ($\pi/3 + \pi$ a $\pi + \pi$)

Gráfico:

Características:

- Región compuesta por dos sectores
- Sector principal: entre ángulos $\pi/3$ y π, radios 0 a 4
- Sector opuesto: entre ángulos $4\pi/3$ y 2π, radios 0 a 2
- Incluye frontera interior, excluye frontera exterior

En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

34. $y = 5$

Solución. Ecuación rectangular: $y = 5$

Sustitución de coordenadas polares:

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r \operatorname{sen} \theta = 5$$

Despejando r:

$$r = \frac{5}{\operatorname{sen} \theta} = 5 \csc \theta$$

Respuesta: $r = 5 \csc \theta$

35. $x + 1 = 0$

Solución. Ecuación rectangular: $x + 1 = 0$

Sustitución de coordenadas polares:

$x = r\cos\theta$

$r\cos\theta + 1 = 0$

Despejando r:

$r\cos\theta = -1$

$r = -\dfrac{1}{\cos\theta} = -\sec\theta$

Respuesta: $r = -\sec\theta$

36. $y = 7x$

Solución. Ecuación rectangular: $y = 7x$

Sustitución de coordenadas polares:

$r\,\mathrm{sen}\,\theta = 7(r\cos\theta)$

$r\,\mathrm{sen}\,\theta = 7r\cos\theta$

Simplificando (asumiendo $r \neq 0$):

$\mathrm{sen}\,\theta = 7\cos\theta$

$\tan\theta = 7$

Respuesta: $\theta = \arctan(7)$

37. $3x + 8y + 6 = 0$

Solución. Ecuación rectangular: $3x + 8y + 6 = 0$

Sustitución de coordenadas polares:

$3(r\cos\theta) + 8(r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 6 = 0$

$r(3\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta) + 6 = 0$

Despejando r:

$r(3\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta) = -6$

$r = -\dfrac{6}{3\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta}$

Respuesta: $r = -\dfrac{6}{3\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta}$

38. $y^2 = -4x + 4$

Solución. Ecuación rectangular: $y^2 = -4x + 4$

Sustitución de coordenadas polares:

$$(r \operatorname{sen} \theta)^2 = -4(r \cos \theta) + 4$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = -4r \cos \theta + 4$$

Reorganizando términos:

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4r \cos \theta - 4 = 0$$

Esta es la ecuación polar. Podemos dejarla así o completar el cuadrado.

Respuesta: $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4r \cos \theta - 4 = 0$

39. $x^2 - 12y - 36 = 0$

Solución. Ecuación rectangular: $x^2 - 12y - 36 = 0$

Sustitución de coordenadas polares:

$$(r \cos \theta)^2 - 12(r \operatorname{sen} \theta) - 36 = 0$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 12r \operatorname{sen} \theta - 36 = 0$$

Respuesta: $r^2 \cos^2 \theta - 12r \operatorname{sen} \theta - 36 = 0$

40. $x^2 + y^2 = 36$

Solución. Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 = 36$

Sustitución de coordenadas polares:

$$(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 36$$
$$r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = 36$$
$$r^2(1) = 36$$
$$r^2 = 36$$
$$r = 6 \quad (\text{pues } r \geq 0)$$

Respuesta: $r = 6$

41. $x^2 - y^2 = 1$

Solución. Ecuación rectangular: $x^2 - y^2 = 1$

Sustitución de coordenadas polares:

$$(r \cos \theta)^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2 = 1$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1$$
$$r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 1$$

Usando identidad trigonométrica:

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

$$r^2\cos 2\theta = 1$$

Respuesta: $r^2\cos 2\theta = 1$

42. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2}$

Solución. Ecuación rectangular: $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2}$

Sustitución de coordenadas polares:

$$x^2+y^2 = r^2, \quad \sqrt{x^2+y^2} = r, \quad x = r\cos\theta$$

$$r^2 + r\cos\theta = r$$

Simplificando (asumiendo $r \neq 0$):

$$r^2 + r\cos\theta - r = 0$$

$$r^2 + r(\cos\theta - 1) = 0$$
$$r(r + \cos\theta - 1) = 0$$

Como $r \neq 0$, tenemos:

$$r + \cos\theta - 1 = 0$$

$$r = 1 - \cos\theta$$

Respuesta: $r = 1 - \cos\theta$

43. $x^3 + y^3 - xy = 0$

Solución. Ecuación rectangular: $x^3 + y^3 - xy = 0$

Sustitución de coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$(r\cos\theta)^3 + (r\operatorname{sen}\theta)^3 - (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$r^3\cos^3\theta + r^3\operatorname{sen}^3\theta - r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Factorizando r^2:

$$r^2(r\cos^3\theta + r\operatorname{sen}^3\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta) = 0$$

Como $r = 0$ es solo el origen, consideramos el otro factor:

$$r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) - \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$r = \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

44. $r = 2\sec\theta$

Solución. Ecuación polar: $r = 2\sec\theta$

Usando identidad: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$$r = \frac{2}{\cos\theta}$$

Multiplicando ambos lados por $\cos\theta$:

$$r\cos\theta = 2$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares: $x = r\cos\theta$

$$x = 2$$

Respuesta: $x = 2$

45. $r\cos\theta = -4$

Solución. Ecuación polar: $r\cos\theta = -4$

Sustituyendo coordenadas rectangulares: $x = r\cos\theta$

$$x = -4$$

Respuesta: $x = -4$

46. $r = 6\operatorname{sen}2\theta$

Solución. Ecuación polar: $r = 6\operatorname{sen}2\theta$

Usando identidad: $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$r = 6(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = 12\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Multiplicando ambos lados por r^2:

$$r^3 = 12r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r\,\mathrm{sen}\,\theta = y, \quad r\cos\theta = x$$

$$r \cdot r^2 = 12(r\,\mathrm{sen}\,\theta)(r\cos\theta)$$
$$r(x^2 + y^2) = 12xy$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$r^2(x^2 + y^2)^2 = 144x^2y^2$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 = 144x^2y^2$$
$$(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$$

Respuesta: $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$

47. $2r = \tan\theta$

Solución. Ecuación polar: $2r = \tan\theta$

Usando identidad: $\tan\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$$2r = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

Multiplicando ambos lados por $\cos\theta$:

$$2r\cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$2x = \frac{y}{r}$$

Multiplicando ambos lados por r:

$$2xr = y$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$4x^2r^2 = y^2$$

$$4x^2(x^2 + y^2) = y^2$$
$$4x^4 + 4x^2y^2 = y^2$$

Reorganizando:

$$4x^4 + 4x^2y^2 - y^2 = 0$$

Respuesta: $4x^4 + 4x^2y^2 - y^2 = 0$

48. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

Solución. Ecuación polar: $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

Usando identidad: $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$r^2 = 4(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Multiplicando ambos lados por r^2:

$$r^4 = 8r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r\operatorname{sen}\theta = y, \quad r\cos\theta = x$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

Respuesta: $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

49. $r^2\cos 2\theta = 16$

Solución. Ecuación polar: $r^2\cos 2\theta = 16$

Usando identidad: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$$r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 16$$

Multiplicando:

$$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 16$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$x = r\cos\theta \Rightarrow x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$x^2 - y^2 = 16$$

Respuesta: $x^2 - y^2 = 16$

50. $r + 5\operatorname{sen}\theta = 0$

Solución. Ecuación polar: $r + 5\operatorname{sen}\theta = 0$

Despejando r:

$$r = -5\operatorname{sen}\theta$$

Multiplicando ambos lados por r:

$$r^2 = -5r\operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$x^2 + y^2 = -5y$$

Completando el cuadrado en y:

$$x^2 + y^2 + 5y = 0$$

$$x^2 + (y^2 + 5y + \frac{25}{4}) = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$$

Respuesta: $x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

51. $r = 2 + \cos\theta$

Solución. Ecuación polar: $r = 2 + \cos\theta$

Multiplicando ambos lados por r:

$$r^2 = 2r + r\cos\theta$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2r + x$$

Aislando r:

$$x^2 + y^2 - x = 2r$$

$$r = \frac{x^2 + y^2 - x}{2}$$

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tenemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - x}{2}$$

Multiplicando por 2:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - x$$

Esta es la ecuación rectangular.

Respuesta: $2\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - x$

52. $r = \frac{2}{1+3\cos\theta}$

Solución. Ecuación polar: $r = \frac{2}{1+3\cos\theta}$

Multiplicando ambos lados por el denominador:

$$r(1 + 3\cos\theta) = 2$$

$$r + 3r\cos\theta = 2$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 3x = 2$$

Aislando la raíz:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - 3x$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$x^2 + y^2 = (2 - 3x)^2$$

$$x^2 + y^2 = 4 - 12x + 9x^2$$

Reorganizando:

$$x^2 + y^2 - 4 + 12x - 9x^2 = 0$$

$$-8x^2 + y^2 + 12x - 4 = 0$$
$$8x^2 - y^2 - 12x + 4 = 0$$

Respuesta: $8x^2 - y^2 - 12x + 4 = 0$

53. $r(4 - \operatorname{sen}\theta) = 10$

Solución. Ecuación polar: $r(4 - \operatorname{sen}\theta) = 10$

Distribuyendo:

$$4r - r\operatorname{sen}\theta = 10$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$4\sqrt{x^2 + y^2} - y = 10$$

Aislando la raíz:

$$4\sqrt{x^2 + y^2} = 10 + y$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$16(x^2 + y^2) = (10 + y)^2$$

$$16x^2 + 16y^2 = 100 + 20y + y^2$$

Reorganizando:

$$16x^2 + 16y^2 - 100 - 20y - y^2 = 0$$

$$16x^2 + 15y^2 - 20y - 100 = 0$$

Respuesta: $16x^2 + 15y^2 - 20y - 100 = 0$

54. $r = \frac{5}{3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta}$

Solución. Ecuación polar: $r = \frac{5}{3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta}$

Multiplicando ambos lados por el denominador:

$$r(3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta) = 5$$

Distribuyendo:

$$3r\cos\theta + 8r\operatorname{sen}\theta = 5$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares:

$$3x + 8y = 5$$

Respuesta: $3x + 8y = 5$

55. $r = 3 + 3\sec\theta$

Solución. Ecuación polar: $r = 3 + 3\sec\theta$

Usando identidad: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$$r = 3 + \frac{3}{\cos\theta}$$

Multiplicando ambos lados por $\cos\theta$:

$$r\cos\theta = 3\cos\theta + 3$$

Sustituyendo coordenadas rectangulares: $x = r\cos\theta$

$$x = 3\cos\theta + 3$$

Como $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$x = 3\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 3$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$x\sqrt{x^2+y^2} = 3x + 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Reorganizando:

$$x\sqrt{x^2+y^2} - 3\sqrt{x^2+y^2} = 3x$$

$$\sqrt{x^2+y^2}(x-3) = 3x$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$(x^2+y^2)(x-3)^2 = 9x^2$$

Respuesta: $(x^2+y^2)(x-3)^2 = 9x^2$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación dada es una espiral. Dibuje su gráfica.

56.

$$r = 2^\theta, \theta \geq 0$$

(logarítmica)

Solución. Identificación: Espiral logarítmica

Análisis: La ecuación $r = 2^\theta$ representa una espiral donde la distancia desde el origen crece exponencialmente con el ángulo.

Propiedades matemáticas:

- Para $\theta = 0$: $r = 2^0 = 1$
- Para $\theta = 1$: $r = 2^1 = 2$
- Para $\theta = 2$: $r = 2^2 = 4$
- Para $\theta = 3$: $r = 2^3 = 8$
- Para $\theta = 4$: $r = 2^4 = 16$

Características de la espiral logarítmica:

- Crecimiento exponencial de r con θ
- La distancia entre vueltas sucesivas aumenta geométricamente
- Forma característica que se encuentra en la naturaleza (conchas de nautilo, galaxias)
- Ángulo constante entre el radio vector y la tangente

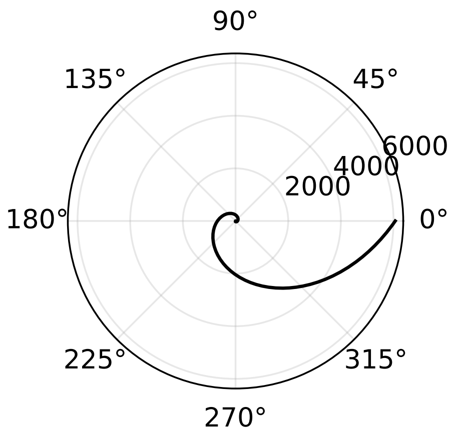
Comportamiento asintótico:

- Cuando $\theta \to 0^+$: $r \to 1$
- Cuando $\theta \to \infty$: $r \to \infty$ (crecimiento exponencial)

Descripción gráfica: La espiral comienza en el punto (1, 0) cuando $\theta = 0$ y se enrolla alrededor del origen en sentido antihorario, alejándose rápidamente debido al crecimiento exponencial.

Gráfico conceptual:

Ecuación en forma general: La espiral logarítmica tiene la forma general $r = ae^{b\theta}$. En este caso, $a = 1$ y $b = \ln 2 \approx 0{,}693$.



57. $r\theta = \pi, \theta > 0$ (hiperbólica)

Solución. Identificación: Espiral hiperbólica

Análisis: La ecuación $r\theta = \pi$ puede reescribirse como $r = \frac{\pi}{\theta}$, que representa una espiral donde la distancia desde el origen decrece hiperbólicamente con el ángulo.

Propiedades matemáticas:

- Para $\theta \to 0^+$: $r \to \infty$
- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$: $r = \frac{\pi}{\pi/2} = 2$
- Para $\theta = \pi$: $r = \frac{\pi}{\pi} = 1$
- Para $\theta = 2\pi$: $r = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$
- Para $\theta = 4\pi$: $r = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$
- Para $\theta \to \infty$: $r \to 0$

Características de la espiral hiperbólica:

- Decrecimiento hiperbólico de r con θ
- La distancia entre vueltas sucesivas disminuye
- Se aproxima asintóticamente al origen cuando $\theta \to \infty$
- También conocida como espiral recíproca

Comportamiento asintótico:

- Cuando $\theta \to 0^+$: $r \to \infty$ (se aleja infinitamente)
- Cuando $\theta \to \infty$: $r \to 0$ (se aproxima al origen)

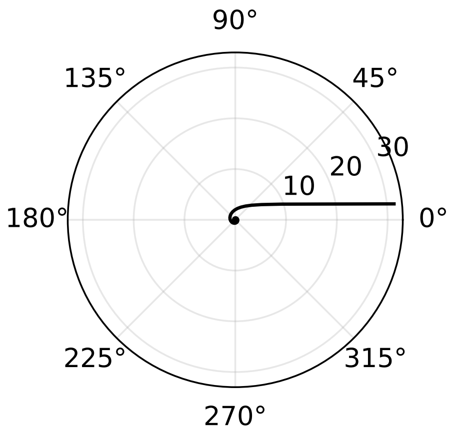
Puntos notables:

- No está definida para $\theta = 0$
- Cruza el eje x positivo en $\theta = \pi$, $r = 1$
- Cruza el eje y positivo en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 2$
- Cruza el eje x negativo en $\theta = 3\pi$, $r = \frac{1}{3}$

Descripción gráfica: La espiral comienza infinitamente lejos del origen cuando θ es muy pequeño y positivo, y se enrolla alrededor del origen en sentido antihorario, acercándose gradualmente al origen a medida que θ aumenta.

Gráfico conceptual:

Ecuación en forma general: La espiral hiperbólica tiene la forma general $r = \frac{a}{\theta}$. En este caso, $a = \pi$.

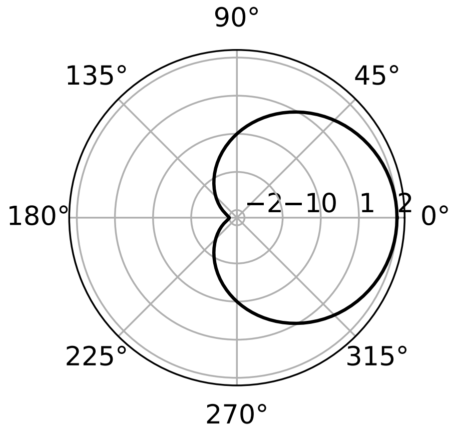


Relación con otras espirales:

- Es el caso especial de la espiral de Fermat cuando $n = -1$
- Es la inversa de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$
- Tiene aplicaciones en física y ingeniería, particularmente en el estudio de campos de fuerzas centrales

En los problemas 33-38, encuentre una ecuación de la gráfica polar dada.

58.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra un círculo que pasa por el origen y tiene su centro sobre el eje x positivo.

Características observadas:

- La gráfica es un círculo
- Pasa por el origen (polo)
- El centro está sobre el eje x positivo
- El diámetro parece ser de 2 unidades

Deducción de la ecuación: Para un círculo en coordenadas polares que pasa por el origen y tiene centro en el eje x, la ecuación general es:

$$r = 2a\cos\theta$$

donde a es la distancia del centro al origen.

Determinación del parámetro: De la gráfica, observamos que el punto más lejano del origen está en $\theta = 0$ con $r = 2$. Por lo tanto:

$$r = 2a\cos\theta \quad \text{y cuando } \theta = 0, r = 2$$

$$2 = 2a\cos 0 = 2a(1) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Ecuación polar:

$$r = 2\cos\theta$$

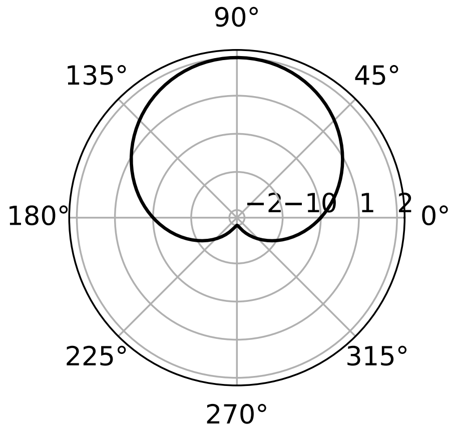
Ecuación rectangular equivalente:

$$r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Respuesta final: $r = 2\cos\theta$

59.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra un círculo que pasa por el origen y tiene su centro sobre el eje y positivo.

Características observadas:

- La gráfica es un círculo
- Pasa por el origen (polo)
- El centro está sobre el eje y positivo
- El diámetro parece ser de 2 unidades

Deducción de la ecuación: Para un círculo en coordenadas polares que pasa por el origen y tiene centro en el eje y, la ecuación general es:

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta$$

donde a es la distancia del centro al origen.

Determinación del parámetro: De la gráfica, observamos que el punto más lejano del origen está en $\theta = \frac{\pi}{2}$ con $r = 2$. Por lo tanto:

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta \quad \text{y cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, r = 2$$

$$2 = 2a \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2a(1) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Ecuación polar:

$$r = 2 \operatorname{sen} \theta$$

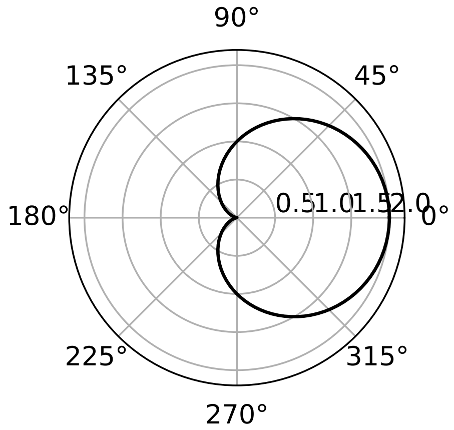
Ecuación rectangular equivalente:

$$r = 2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow r^2 = 2r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Respuesta final: $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

60.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra una cardioide con simetría con respecto al eje x y el lazo hacia la derecha.

Características observadas:

- Forma de corazón (cardioide)
- Simétrica con respecto al eje x
- Lazo hacia la derecha
- Pasa por el origen
- Distancia máxima: 2 unidades

Deducción de la ecuación: Para una cardioide con simetría en el eje x y lazo hacia la derecha, la ecuación general es:

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

Determinación del parámetro: La distancia máxima ocurre cuando $\cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0$. De la gráfica, $r_{\text{máx}} = 2$:

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad \text{y cuando } \theta = 0, r = 2$$

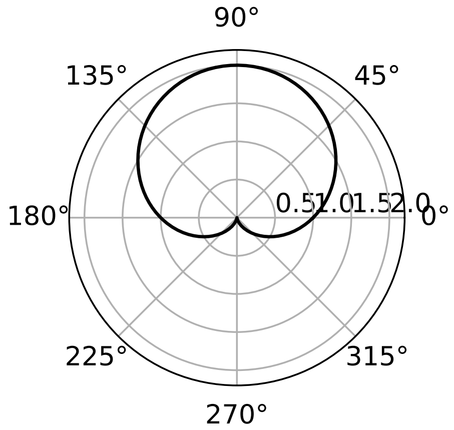
$$2 = a(1 + 1) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Ecuación polar:

$$r = 1 + \cos\theta$$

Respuesta final: $r = 1 + \cos\theta$

61.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra una cardioide con simetría con respecto al eje y y el lazo hacia arriba.

Características observadas:

- Forma de corazón (cardioide)
- Simétrica con respecto al eje y
- Lazo hacia arriba
- Pasa por el origen
- Distancia máxima: 2 unidades

Deducción de la ecuación: Para una cardioide con simetría en el eje y y lazo hacia arriba, la ecuación general es:

$$r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$$

Determinación del parámetro: La distancia máxima ocurre cuando $\operatorname{sen}\theta = 1$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$. De la gráfica, $r_{\text{máx}} = 2$:

$$r = a(1 + \operatorname{sen}\theta) \quad \text{y cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, r = 2$$

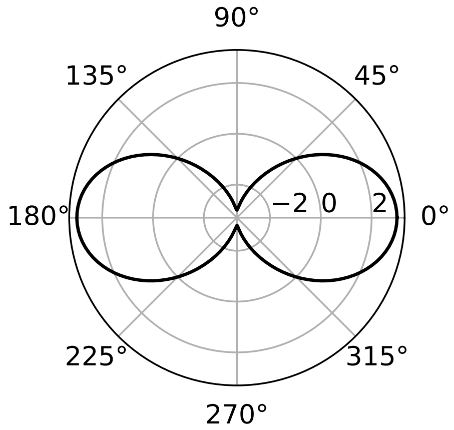
$$2 = a(1 + 1) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Ecuación polar:

$$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$$

Respuesta final: $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

62.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra una rosa de 4 pétalos.

Características observadas:

- 4 pétalos simétricos
- Los pétalos están a lo largo de los ejes coordenados
- Longitud de cada pétalo: 3 unidades
- Simétrica con respecto al origen y ambos ejes

Deducción de la ecuación: Para una rosa con pétalos a lo largo de los ejes coordenados, la ecuación general es:

$$r = a\cos(2\theta) \quad \text{o} \quad r = a\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

Determinación del tipo y parámetro: Los pétalos están orientados a lo largo de los ejes, lo que corresponde a $r = a\cos(2\theta)$. La longitud del pétalo es 3, por lo tanto $a = 3$.

Ecuación polar:

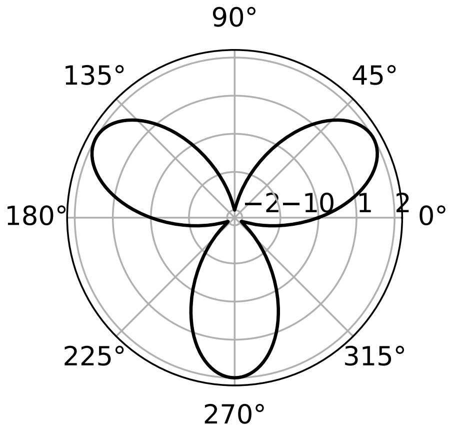
$$r = 3\cos(2\theta)$$

Verificación de puntos clave:

- $\theta = 0$: $r = 3\cos 0 = 3$ (extremo del pétalo derecho)
- $\theta = \frac{\pi}{4}$: $r = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (entre pétalos)
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: $r = 3\cos\pi = -3$ (extremo del pétalo izquierdo)

Respuesta final: $r = 3\cos(2\theta)$

63.



Solución. Análisis de la gráfica: La gráfica muestra una rosa de 3 pétalos.

Características observadas:

- 3 pétalos simétricos
- Los pétalos están orientados simétricamente
- Longitud de cada pétalo: 2 unidades
- Simétrica con respecto al origen

Deducción de la ecuación: Para una rosa con número impar de pétalos, la ecuación general es:

$$r = a\cos(n\theta) \quad \text{o} \quad r = a\operatorname{sen}(n\theta) \quad \text{con } n \text{ impar}$$

Determinación del tipo y parámetros: Con 3 pétalos, $n = 3$. La orientación sugiere $r = a\operatorname{sen}(3\theta)$. La longitud del pétalo es 2, por lo tanto $a = 2$.

Ecuación polar:

$$r = 2\operatorname{sen}(3\theta)$$

Verificación de puntos clave:

- $\theta = \frac{\pi}{6}$: $r = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2$ (extremo de un pétalo)
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: $r = 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -2$ (extremo de otro pétalo)
- $\theta = \frac{5\pi}{6}$: $r = 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} = 2$ (extremo del tercer pétalo)

Propiedades de la rosa de 3 pétalos:

- Número de pétalos $= n$ cuando n es impar
- Los pétalos están espaciados cada $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$ radianes
- La función seno produce pétalos orientados simétricamente

Respuesta final: $r = 2\,\text{sen}(3\theta)$

En los problemas 39-42, encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares indicadas.

64. $r = 2, \quad r = 4\,\text{sen}\,\theta$

Solución. Igualamos las ecuaciones:

$$2 = 4\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Verificamos en la ecuación original:

$$r = 2 \text{ (siempre positivo)}$$

Puntos de intersección:

$$\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \quad \left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

65. $r = \text{sen}\,\theta, \quad r = \text{sen}\,2\theta$

Solución. Igualamos las ecuaciones:

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0$$

$$\text{sen}\,\theta(1 - 2\cos\theta) = 0$$

Caso 1: $\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$

Para $\theta = 0$: $r = \text{sen}\,0 = 0 \to (0, 0)$

Para $\theta = \pi$: $r = \text{sen}\,\pi = 0 \to (0, \pi)$ (mismo punto)

Caso 2: $1 - 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$: $r = \text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para $\theta = \frac{5\pi}{3}$: $r = \text{sen}(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Puntos de intersección:

$$(0, 0), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

66. $r = 1 - \cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$

Solución. Igualamos las ecuaciones:

$$1 - \cos\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow -2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$: $r = 1 - \cos(\frac{\pi}{2}) = 1$

Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$: $r = 1 - \cos(\frac{3\pi}{2}) = 1$

Puntos de intersección:

$$\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

67. $r = 3 - 3\cos\theta, \quad r = 3\cos\theta$

Solución. Igualamos las ecuaciones:

$$3 - 3\cos\theta = 3\cos\theta \Rightarrow 3 = 6\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$: $r = 3\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

Para $\theta = \frac{5\pi}{3}$: $r = 3\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

Puntos de intersección:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

En los problemas 43 y 44, use el hecho de que $r = f(\theta)$ y $-r = f(\theta + \pi)$ describen la misma curva como una ayuda para determinar los puntos de intersección del par dado de ecuaciones polares.

68. $r = 3, \quad r = 6\,\text{sen}\,2\theta$

Solución. Para $r = 3$: $3 = 6\,\text{sen}\,2\theta \Rightarrow \text{sen}\,2\theta = \frac{1}{2}$

$$2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

Puntos: $\left(3, \frac{\pi}{12}\right), \left(3, \frac{5\pi}{12}\right), \left(3, \frac{13\pi}{12}\right), \left(3, \frac{17\pi}{12}\right)$

Ahora usando $-r = f(\theta + \pi)$: $-3 = 6\,\text{sen}\,2\theta \Rightarrow \text{sen}\,2\theta = -\frac{1}{2}$

$$2\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

Puntos: $\left(-3, \frac{7\pi}{12}\right), \left(-3, \frac{11\pi}{12}\right), \left(-3, \frac{19\pi}{12}\right), \left(-3, \frac{23\pi}{12}\right)$

69. $r = \cos 2\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$

Solución. Caso 1: $\cos 2\theta = 1 + \cos\theta$

Usando identidad: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$2\cos^2\theta - 1 = 1 + \cos\theta$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Solo $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0{,}78$ está en $[-1, 1]$

$\theta = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$ y su simétrico

Caso 2: Usando $-r = f(\theta + \pi)$: $-\cos 2\theta = 1 + \cos\theta$

$$-\cos 2\theta = 1 + \cos\theta$$

$$-2\cos^2\theta + 1 = 1 + \cos\theta$$

$$-2\cos^2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta(-2\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

Puntos de intersección completos requieren evaluación numérica adicional.

En los problemas 55-58, identifique las simetrías si el par de puntos dados está sobre la gráfica de $r = f(\theta)$.

70. $(r, \theta), (-r, \pi - \theta)$

Solución. Analizamos la transformación de coordenadas polares:

$$(r, \theta) \to (-r, \pi - \theta)$$

Recordemos las propiedades fundamentales de las coordenadas polares:

- $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$
- $(r, -\theta)$ es el reflejo sobre el eje polar (eje x)

Aplicando estas propiedades:

$$(-r, \pi - \theta) = (r, (\pi - \theta) + \pi) = (r, 2\pi - \theta) = (r, -\theta)$$

El punto $(r, -\theta)$ es el reflejo del punto (r, θ) con respecto al eje x.

Respuesta: Simetría con respecto al eje x (eje polar).

71. $(r, \theta), (r, \theta + \pi)$

Solución. Analizamos la transformación:

$$(r, \theta) \to (r, \theta + \pi)$$

Por la propiedad fundamental:

$$(r, \theta + \pi) = (-r, \theta)$$

El punto $(-r, \theta)$ está en la dirección opuesta al punto (r, θ), lo que corresponde a una rotación de 180° alrededor del origen.

Respuesta: Simetría con respecto al origen.

72. $(r, \theta), (-r, \theta + 2\pi)$

Solución. Analizamos la transformación:

$$(r, \theta) \to (-r, \theta + 2\pi)$$

Dado que 2π es un período completo:

$$(-r, \theta + 2\pi) = (-r, \theta)$$

Y por la propiedad fundamental:

$$(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$$

Esta es la misma transformación que en el ejercicio 56.

Respuesta: Simetría con respecto al origen.

73. $(r, \theta), (-r, -\theta)$

Solución. Analizamos la transformación:

$$(r, \theta) \to (-r, -\theta)$$

Aplicando propiedades:

$$(-r, -\theta) = (r, -\theta + \pi) = (r, \pi - \theta)$$

El punto $(r, \pi - \theta)$ es el reflejo del punto (r, θ) con respecto al eje y.

Respuesta: Simetría con respecto al eje y.

En los problemas 59 y 60, considere que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete geométricamente el resultado dado.

74.

$$f(-\theta) = f(\theta) \quad \text{(función par)}$$

Solución. Si $f(-\theta) = f(\theta)$, entonces:

$$r = f(\theta) = f(-\theta)$$

Esto significa que si el punto (r, θ) está en la gráfica, entonces el punto $(r, -\theta)$ también está en la gráfica.

El punto $(r, -\theta)$ es el reflejo del punto (r, θ) con respecto al eje x.

Interpretación geométrica: La gráfica es simétrica con respecto al eje x (eje polar).

75.

$$f(-\theta) = -f(\theta) \quad \text{(función impar)}$$

Solución. Si $f(-\theta) = -f(\theta)$, entonces:

$$r = f(\theta) = -f(-\theta)$$

Esto significa que si el punto (r, θ) está en la gráfica, entonces el punto $(-r, -\theta)$ también está en la gráfica.

Aplicando propiedades:

$$(-r, -\theta) = (r, -\theta + \pi) = (r, \pi - \theta)$$

El punto $(r, \pi - \theta)$ es el reflejo del punto (r, θ) con respecto al eje y.

Interpretación geométrica: La gráfica es simétrica con respecto al eje y.

76. (a) ¿Cuál es la diferencia entre los círculos $r = -4$ y $r = 4$?

(b) ¿Cuál es la diferencia entre las rectas que pasan por el origen $\theta = \pi/6$ y $\theta = 7\pi/6$?

Solución. (a) En coordenadas polares, analizamos las ecuaciones:

Para $r = 4$: Todos los puntos a distancia 4 del origen.

Para $r = -4$: Aplicando la propiedad fundamental:

$$(-4, \theta) = (4, \theta + \pi)$$

Esto significa que el círculo $r = -4$ es idéntico al círculo $r = 4$, pero con un desplazamiento angular de π radianes (180°).

Sin embargo, como un círculo es simétrico, ambos representan el mismo conjunto de puntos.

Respuesta: No hay diferencia geométrica; ambos representan el mismo círculo de radio 4 centrado en el origen.

Solución (b) Analizamos las rectas:

Para $\theta = \pi/6$: Recta que forma un ángulo de 30° con el eje polar.

Para $\theta = 7\pi/6$: Notamos que:

$$7\pi/6 = \pi/6 + \pi$$

Aplicando la propiedad fundamental:

$$(r, 7\pi/6) = (-r, \pi/6)$$

Esto significa que la recta $\theta = 7\pi/6$ es la misma que la recta $\theta = \pi/6$, ya que en una recta que pasa por el origen, los puntos (r, θ) y $(-r, \theta)$ representan la misma recta.

Respuesta: No hay diferencia geométrica; ambas ecuaciones representan la misma recta que pasa por el origen con ángulo $\pi/6$ (30°).

Resumen de Propiedades de Simetría

- Simetría con respecto al eje x: $f(\theta) = f(-\theta)$ o $(r, \theta) \to (r, -\theta)$
- Simetría con respecto al eje y: $f(\theta) = -f(-\theta)$ o $(r, \theta) \to (r, \pi - \theta)$
- Simetría con respecto al origen: $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ o $(r, \theta) \to (-r, \theta)$

2.6 Cálculo en coordenadas polares

En los problemas 1–6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ.

Fórmula para la pendiente en coordenadas polares: Para una curva polar $r = f(\theta)$, la pendiente de la recta tangente está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

1.

$$r = \theta; \quad \theta = \pi/2$$

Solución. Dado $r = \theta$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = 1$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta}{(1)\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta}$$

Evaluando en $\theta = \pi/2$:

$$\operatorname{sen}(\pi/2) = 1, \quad \cos(\pi/2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + (\pi/2)(0)}{0 - (\pi/2)(1)} = \frac{1}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

Respuesta: La pendiente es $-\dfrac{2}{\pi}$

2.

$$r = 1/\theta; \quad \theta = 3$$

Solución. Dado $r = \theta^{-1}$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\theta^{-2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{1}{\theta}\right)\cos\theta}{\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)\cos\theta - \left(\frac{1}{\theta}\right)\operatorname{sen}\theta} = \frac{-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\theta}}{-\frac{\cos\theta}{\theta^2} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}$$

Multiplicando numerador y denominador por θ^2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta}{-\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{-(\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}$$

Evaluando en $\theta = 3$:

$$\cos 3 \approx -0{,}9900, \quad \operatorname{sen} 3 \approx 0{,}1411$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(-0{,}9900) - 0{,}1411}{-(3(0{,}1411) + (-0{,}9900))} = \frac{-2{,}9700 - 0{,}1411}{-(0{,}4233 - 0{,}9900)} = \frac{-3{,}1111}{-(-0{,}5667)} = \frac{-3{,}1111}{0{,}5667} \approx -5{,}49$$

Respuesta: La pendiente es aproximadamente $-5{,}49$

3.

$$r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta; \quad \theta = \pi/3$$

Solución. Dado $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\cos\theta$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + (4 - 2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{(-2\cos\theta)\cos\theta - (4 - 2\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

Simplificando el numerador:

$$-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 4\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Simplificando el denominador:

$$-2\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-2\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta}$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$:

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(\frac{1}{2}) - 4(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2})}{-2(\frac{1}{4}) - 4(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2(\frac{3}{4})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}}$$

Respuesta: La pendiente es $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}}$

4.

$$r = 1 - \cos\theta; \quad \theta = 3\pi/4$$

Solución. Dado $r = 1 - \cos\theta$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta + (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Evaluando en $\theta = 3\pi/4$:

$$\cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(3\pi/2) = 0, \quad \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$$

Numerador:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Denominador:

$$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Respuesta: La pendiente es $\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

5.

$$r = \operatorname{sen}\theta; \quad \theta = \pi/6$$

Solución. Dado $r = \operatorname{sen}\theta$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \cos\theta$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + (\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{(\cos\theta)\cos\theta - (\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

Evaluando en $\theta = \pi/6$:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(2\cdot\pi/6) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

Respuesta: La pendiente es $\sqrt{3}$

6.

$$r = 10\cos\theta; \quad \theta = \pi/4$$

Solución. Dado $r = 10\cos\theta$, tenemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -10\operatorname{sen}\theta$$

Aplicando la fórmula de la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-10\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + (10\cos\theta)\cos\theta}{(-10\operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (10\cos\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{-10\operatorname{sen}^2\theta + 10\cos^2\theta}{-10\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{-20\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{10\cos 2\theta}{-10\operatorname{sen}2\theta} = -\cot 2\theta$$

Evaluando en $\theta = \pi/4$:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot(2\cdot\pi/4) = -\cot(\pi/2) = 0$$

Respuesta: La pendiente es 0

En los problemas 7 y 8, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta tangente es vertical.

Criterios para tangentes horizontales y verticales:

- Tangente horizontal: $\frac{dy}{d\theta} = 0$ y $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$
- Tangente vertical: $\frac{dx}{d\theta} = 0$ y $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$

Donde:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

7.

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

Solución. Primero calculamos las derivadas:

$$x = (2 + 2\cos\theta)\cos\theta = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$$

$$y = (2 + 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta$$

Derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta = -2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta$$

Tangentes horizontales: $\frac{dy}{d\theta} = 0$

$$2\cos\theta + 2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta + \cos 2\theta = 0$$

Usando identidad: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática:

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos\theta = -1$$

$$\theta = \pi/3, 5\pi/3 \quad \text{o} \quad \theta = \pi$$

Verificando que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ en estos puntos.

Tangentes verticales: $\frac{dx}{d\theta} = 0$

$$-2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta = 0$$

Usando identidad: $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta(1 + 2\cos\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 0, \pi \quad \text{o} \quad \theta = 2\pi/3, 4\pi/3$$

Verificando que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ en estos puntos.

8.

$$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$$

Solución. Calculamos las derivadas:

$$x = (1 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$y = (1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

Derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta - (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = -\operatorname{sen}\theta - \cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta - \operatorname{sen}2\theta$$

Tangentes horizontales: $\frac{dy}{d\theta} = 0$

$$\cos\theta - \operatorname{sen}2\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi/2, 3\pi/2 \quad \text{o} \quad \theta = \pi/6, 5\pi/6$$

Tangentes verticales: $\frac{dx}{d\theta} = 0$

$$-\operatorname{sen}\theta - \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta = 0$$

Usando identidad: $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$$\operatorname{sen}\theta + 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

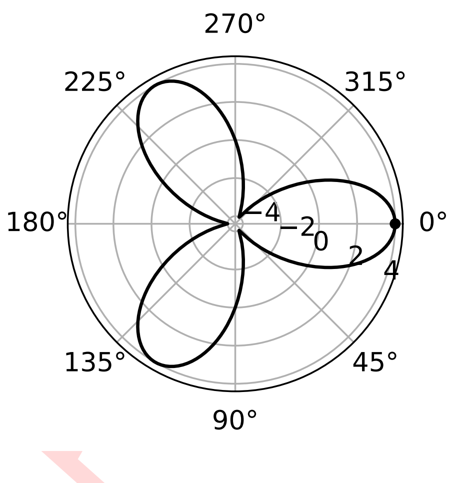
$$\operatorname{sen}\theta = 1 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi/2 \quad \text{o} \quad \theta = 7\pi/6, 11\pi/6$$

En los problemas 9 y 10, determine la ecuación rectangular de la recta tangente en el punto indicado.

9.

$$r = 4\cos 3\theta$$



Solución. Para la curva $r = 4\cos 3\theta$, necesitamos encontrar la ecuación de la recta tangente.

Primero, encontremos el punto de tangencia. La figura indica que el punto está en $r = 4$.

Cuando $r = 4$:

$$4 = 4\cos 3\theta \Rightarrow \cos 3\theta = 1$$

$$3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Consideremos $\theta = 0$ (punto más a la derecha en la rosa de 3 pétalos).

Coordenadas rectangulares del punto:

$$x = r\cos\theta = 4\cos 0 = 4$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen} 0 = 0$$

Punto de tangencia: $(4, 0)$

Ahora calculamos la pendiente usando la fórmula para coordenadas polares:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Para $r = 4\cos 3\theta$:

$$\frac{dr}{d\theta} = -12\operatorname{sen} 3\theta$$

En $\theta = 0$:

$$r = 4\cos 0 = 4, \quad \frac{dr}{d\theta} = -12\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(0)\operatorname{sen} 0 + (4)\cos 0}{(0)\cos 0 - (4)\operatorname{sen} 0} = \frac{4}{0}$$

La pendiente es infinita, por lo que la recta tangente es vertical.

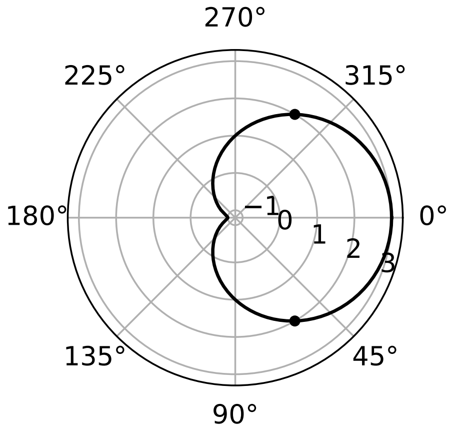
Ecuación de la recta vertical que pasa por $(4, 0)$:

$$x = 4$$

Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $x = 4$

10.

$$r = 1 + 2\cos\theta$$



Solución. Para la curva $r = 1+2\cos\theta$ (caracol), la figura indica dos puntos de tangencia: $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$.

Consideremos $\theta = \pi/3$:

Coordenadas polares:

$$r = 1 + 2\cos(\pi/3) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$$

Coordenadas rectangulares:

$$x = r\cos\theta = 2\cos(\pi/3) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}(\pi/3) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Punto de tangencia: $(1, \sqrt{3})$

Ahora calculamos la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Para $r = 1 + 2\cos\theta$:

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

En $\theta = \pi/3$:

$$r = 2, \quad \frac{dr}{d\theta} = -2\,\mathrm{sen}(\pi/3) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Numerador:

$$\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta = (-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

Denominador:

$$\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta = (-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Pendiente:

$$m = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ecuación de la recta tangente (forma punto-pendiente):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)$$

Multiplicando por 9 para eliminar denominadores:

$$9(y-\sqrt{3}) = \sqrt{3}(x-1)$$

$$9y - 9\sqrt{3} = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}x - 9y + 8\sqrt{3} = 0$$

Ahora consideremos $\theta = 5\pi/3$:

Coordenadas polares:

$$r = 1 + 2\cos(5\pi/3) = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$$

Coordenadas rectangulares:

$$x = r\cos\theta = 2\cos(5\pi/3) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}(5\pi/3) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

Punto de tangencia: $(1, -\sqrt{3})$

En $\theta = 5\pi/3$:

$$r = 2, \quad \frac{dr}{d\theta} = -2\operatorname{sen}(5\pi/3) = -2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos(5\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}(5\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Numerador:

$$\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta = (\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

Denominador:

$$\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta = (\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Pendiente:

$$m = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - (-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)$$

$$y + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)$$

Multiplicando por 9:

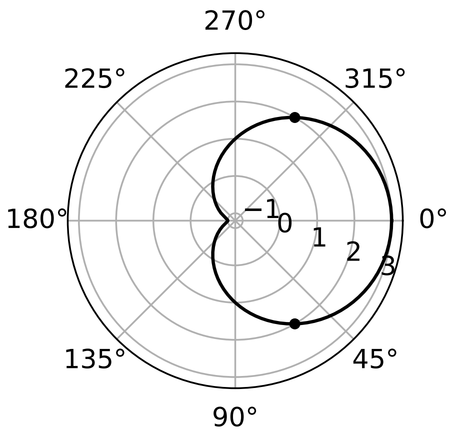
$$9(y+\sqrt{3}) = -\sqrt{3}(x-1)$$

$$9y + 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}x + 9y + 8\sqrt{3} = 0$$

Respuesta:

- Para $\theta = \pi/3$: $\sqrt{3}x - 9y + 8\sqrt{3} = 0$
- Para $\theta = 5\pi/3$: $\sqrt{3}x + 9y + 8\sqrt{3} = 0$



En los problemas 11–16, encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

Teorema 2.6.1 (Rectas tangentes en el origen)**.** *Para una curva polar $r = f(\theta)$, las rectas tangentes en el origen corresponden a los valores de θ para los cuales $r = 0$. La ecuación polar de una recta que pasa por el origen con ángulo θ_0 es $\theta = \theta_0$.*

11.

$$r = -2\operatorname{sen}\theta$$

Solución. Buscamos los valores de θ para los cuales $r = 0$:

$$-2\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\theta = 0, \pi$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \pi$$

Respuesta: $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

12.

$$r = 3\cos\theta$$

Solución. Buscamos $r = 0$:

$$3\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Respuesta: $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

13.

$$r = 1 + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

Solución. Buscamos $r = 0$:

$$1 + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = -1$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Respuesta: $\theta = \frac{5\pi}{4}$ y $\theta = \frac{7\pi}{4}$

14.

$$r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$$

Solución. Buscamos $r = 0$:

$$1 - 2\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Respuesta: $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$

15.

$$r = 2\cos 5\theta$$

Solución. Buscamos $r = 0$:

$$2\cos 5\theta = 0 \Rightarrow \cos 5\theta = 0$$

$$5\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$$

Respuesta: $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$

16.

$$r = 2\operatorname{sen} 2\theta$$

Solución. Buscamos $r = 0$:

$$2\operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

$$2\theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las rectas tangentes en el origen son:

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

Respuesta: $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

En los problemas 17–24, encuentre el área de la región que está acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica.

El área acotada por la curva $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

17.

$$r = 2\operatorname{sen}\theta$$

Solución. Esta es una circunferencia de radio 1. Para barrer toda la región, θ va de 0 a π:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 4\operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

Usando la identidad $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos 2\theta) d\theta$$

$$A = \left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi$$

Respuesta: π

18.

$$r = 10\cos\theta$$

Solución. Esta es una circunferencia de radio 5. Para barrer toda la región, θ va de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (10\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 100\cos^2\theta d\theta$$

$$A = 50\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$$

Usando simetría y la identidad $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$A = 50 \cdot 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 50\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$A = 50\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 50\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 25\pi$$

Respuesta: 25π

19.

$$r = 4 + 4\cos\theta$$

Solución. Esta es una cardioide. Para barrer toda la región, θ va de 0 a 2π:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 16(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$A = 8\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$A = 8\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$A = 8\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$A = 8\left[\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$A = 8\,(3\pi+0+0) = 24\pi$$

Respuesta: 24π

20.

$$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$$

Solución. Esta es una cardioide. Para barrer toda la región, θ va de 0 a 2π:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta)d\theta$$

Usando $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2\operatorname{sen}\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\cos\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{2}(3\pi + 2 - 0 - 0 - 2 + 0) = \frac{3\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{3\pi}{2}$

21.

$$r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Solución. Esta es una limaçon. Para barrer toda la región, θ va de 0 a 2π:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 + 2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9 + 12\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta)d\theta$$

Usando $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9 + 12\operatorname{sen}\theta + 2 - 2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(11 + 12\operatorname{sen}\theta - 2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[11\theta - 12\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{2}(22\pi - 12 - 0 + 12 + 0) = 11\pi$$

Respuesta: 11π

22.

$$r = 2 + \cos\theta$$

Solución. Esta es una limaçon. Para barrer toda la región, θ va de 0 a 2π:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4 + 4\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2} + 4\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2}\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{2}(9\pi + 0 + 0) = \frac{9\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{9\pi}{2}$

23.

$$r = 3\operatorname{sen}2\theta$$

Solución. Esta es una rosa de 4 pétalos. Por simetría, calculamos el área de un pétalo y multiplicamos por 4.

Un pétalo completo se barre cuando 2θ va de 0 a π, es decir, θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3\operatorname{sen}2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 9\operatorname{sen}^2 2\theta d\theta$$

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta d\theta$$

Usando $\operatorname{sen}^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{9}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta) d\theta$$

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{9}{4}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{9\pi}{8}$$

Área total:

$$A = 4 \cdot \frac{9\pi}{8} = \frac{9\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{9\pi}{2}$

24.

$$r = \cos 3\theta$$

Solución. Esta es una rosa de 3 pétalos. Por simetría, calculamos el área de un pétalo y multiplicamos por 3.

Un pétalo completo se barre cuando 3θ va de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, es decir, θ de $-\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{6}$:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(\cos 3\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 3\theta d\theta$$

Usando simetría y $\cos^2 3\theta = \frac{1+\cos 6\theta}{2}$:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta = \int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta$$

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(1+\cos 6\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_0^{\pi/6}$$

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi}{12}$$

Área total:

$$A = 3\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Respuesta: $\frac{\pi}{4}$

En los problemas 25–30, determine el área de la región que está acotada por la gráfica de una ecuación polar dada y los rayos indicados.

El área acotada por la curva $r = f(\theta)$ entre los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 d\theta$$

25.

$$r = 2\theta,\ \theta \geq 0,\ \theta = 0,\ \theta = 3\pi/2$$

Solución. Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2}(2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2} 4\theta^2 d\theta$$

$$A = 2\int_0^{3\pi/2}\theta^2 d\theta = 2\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{3\pi/2}$$

$$A = 2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{27\pi^3}{8} = \frac{54\pi^3}{24} = \frac{9\pi^3}{4}$$

Respuesta: $\dfrac{9\pi^3}{4}$

26.

$$r\theta = \pi,\ \theta > 0,\ \theta = \pi/2,\ \theta = \pi$$

Solución. Primero despejamos r:

$$r = \frac{\pi}{\theta}$$

Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi^2}{\theta^2}d\theta$$

$$A = \frac{\pi^2}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \theta^{-2} d\theta = \frac{\pi^2}{2}\left[-\frac{1}{\theta}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$A = \frac{\pi^2}{2}\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi/2}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$A = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{\pi}{2}$

27.

$r = e^{\theta}$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$

Solución. Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (e^{\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2\theta} d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\theta}}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left(e^{2\pi} - e^{0}\right)$$

$$A = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$$

Respuesta: $\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$

28.

$r = 10e^{-\theta}$, $\theta = 1$, $\theta = 2$

Solución. Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_1^{2} (10e^{-\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_1^{2} 100e^{-2\theta} d\theta$$

$$A = 50\int_1^{2} e^{-2\theta} d\theta = 50\left[-\frac{e^{-2\theta}}{2}\right]_1^{2}$$

$$A = -25\left(e^{-4} - e^{-2}\right) = 25(e^{-2} - e^{-4})$$

$$A = 25e^{-2}(1 - e^{-2}) = \frac{25}{e^2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Respuesta: $25(e^{-2} - e^{-4}) = \frac{25}{e^2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

29.

$r = \tan\theta$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$

Solución. Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\tan\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta d\theta$$

Usamos la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sec^2\theta - 1) d\theta = \frac{1}{2}\left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \tan 0 + 0\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Respuesta: $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

30.

$$r \operatorname{sen}\theta = 5,\ \theta = \pi/6,\ \theta = \pi/3$$

Solución. Primero despejamos r:

$$r = \frac{5}{\operatorname{sen}\theta} = 5\csc\theta$$

Aplicamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} (5\csc\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} 25\csc^2\theta d\theta$$

$$A = \frac{25}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^2\theta d\theta = \frac{25}{2}\left[-\cot\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

Evaluamos:

$$\cot(\pi/3) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot(\pi/6) = \sqrt{3}$$

$$A = \frac{25}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = \frac{25}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$A = \frac{25}{2}\left(\frac{3-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{25}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{25}{\sqrt{3}}$$

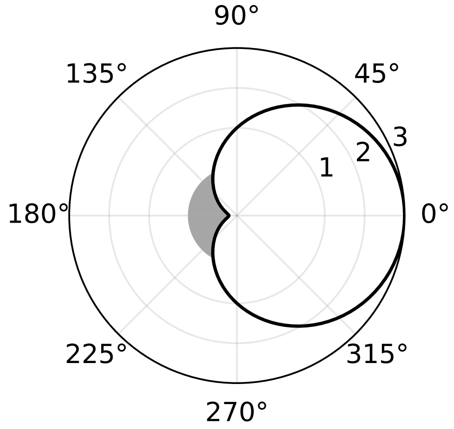
Racionalizando:

$$A = \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

Respuesta: $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

En los problemas 31 y 32, la gráfica es de la ecuación polar $r = 1 + 2\cos\theta$. Determine el área de la región sombreada.

31.



Solución. Para la curva $r = 1+2\cos\theta$ (caracol con lazo interno), necesitamos identificar qué región corresponde a la sombreada en la figura.

Por la forma típica de estos problemas, la región sombreada suele ser el lazo interno del caracol. Para encontrar los límites del lazo interno, buscamos donde $r = 0$:

$$1 + 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

El lazo interno se barre cuando θ va de $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$. Sin embargo, en este intervalo r es negativo, por lo que debemos tener cuidado con el área.

Usamos la fórmula del área polar:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

Para el lazo interno, integramos de $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1+2\cos\theta)^2 d\theta$$

Desarrollamos el integrando:

$$(1+2\cos\theta)^2 = 1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta$$

Usando la identidad $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta = 1 + 4\cos\theta + 2(1+\cos 2\theta) = 3 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (3 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta) d\theta$$

Integramos término a término:

$$A = \frac{1}{2}\left[3\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta\right]_{2\pi/3}^{4\pi/3}$$

Evaluamos en los límites:

Para $\theta = \frac{4\pi}{3}$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Para $\theta = \frac{2\pi}{3}$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

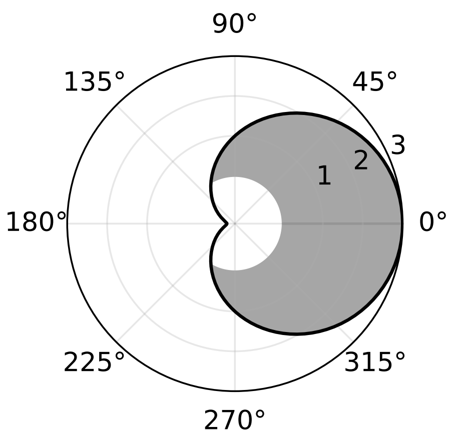
Calculamos la diferencia:

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(4\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dado que el área debe ser positiva y $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}1416 - 2{,}5981 = 0{,}5435 > 0$, este es el área del lazo interno.

Respuesta: $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

32.



Solución. Para la figura, la región sombreada suele ser la parte externa del caracol, excluyendo el lazo interno.

El área total del caracol se obtiene integrando de 0 a 2π:

$$A_{\text{total}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta)^2 d\theta$$

Usando el mismo desarrollo del integrando:

$$A_{\text{total}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta) d\theta$$

$$A_{\text{total}} = \frac{1}{2}\left[3\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(6\pi + 0 + 0) = 3\pi$$

El área de la región externa es el área total menos el área del lazo interno:

$$A_{\text{externa}} = A_{\text{total}} - A_{\text{lazo interno}} = 3\pi - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_{\text{externa}} = 3\pi - \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Respuesta: $2\pi + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

- Área del lazo interno: $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5435$
- Área de la región externa: $2\pi + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}2832 + 2{,}5981 = 8{,}8813$
- Área total: $3\pi \approx 9{,}4248$
- Suma: $0{,}5435 + 8{,}8813 = 9{,}4248$

En los problemas 33–38, determine el área de la región descrita.

33. Fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2\cos 3\theta$.

Solución. La rosa $r = 2\cos 3\theta$ tiene 3 pétalos. Necesitamos el área fuera de $r = 1$ pero dentro de los pétalos.

Primero encontramos los puntos de intersección:

$$2\cos 3\theta = 1 \Rightarrow \cos 3\theta = \frac{1}{2}$$

$$3\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \ldots$$

$$\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \ldots$$

Por simetría, calculamos el área de una porción y multiplicamos. El área dentro de un pétalo pero fuera del círculo es:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(2\cos 3\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/6} 4\cos^2 3\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta = 4\int_0^{\pi/6}(1+\cos 6\theta)d\theta$$

$$= 4\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_0^{\pi/6} = 4\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

El área dentro del círculo en el mismo sector es:

$$A_{\text{círculo}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1^2 d\theta = \frac{\pi}{6}$$

Área de una porción: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Como hay 6 porciones simétricas (2 por cada pétalo):

$$A_{\text{total}} = 6 \times \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

Respuesta: 3π

34. Común a los interiores de los círculos $r = \cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$.

Solución. Los círculos se intersecan cuando:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Por simetría, el área común es 4 veces el área en el primer cuadrante entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$, donde $r = \cos\theta$ es el círculo exterior.

$$A = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)d\theta = \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Respuesta: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

35. Dentro del círculo $r = 5\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la limaçon $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$.

Solución. Puntos de intersección:

$$5\operatorname{sen}\theta = 3 - \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 6\operatorname{sen}\theta = 3 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

El área es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} [(5\operatorname{sen}\theta)^2 - (3-\operatorname{sen}\theta)^2]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} [25\operatorname{sen}^2\theta - (9 - 6\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} [24\operatorname{sen}^2\theta + 6\operatorname{sen}\theta - 9]d\theta$$

Usando $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} [12(1-\cos 2\theta) + 6\operatorname{sen}\theta - 9]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} [3 + 6\operatorname{sen}\theta - 12\cos 2\theta]d\theta$$

Integrando:

$$= \frac{1}{2}\left[3\theta - 6\cos\theta - 6\operatorname{sen}2\theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

Evaluando:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15\pi}{6} - 6\cos\frac{5\pi}{6} - 6\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{6} + 6\cos\frac{\pi}{6} + 6\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi - 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi + 12\sqrt{3}) = \pi + 6\sqrt{3}$$

Respuesta: $\pi + 6\sqrt{3}$

36. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del problema 35.

Solución. Esta es la región dentro de ambas curvas: dentro de $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$ y dentro de $r = 5\operatorname{sen}\theta$.

Por simetría, el área común es el área dentro de $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$ (la curva más pequeña en la región de interés).

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3-\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (9 - 6\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(9 - 6\operatorname{sen}\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{19}{2} - 6\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{19}{2}\theta + 6\cos\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(19\pi) = \frac{19\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{19\pi}{2}$

37. Dentro de la cardioide $r = 4 - 4\cos\theta$ y fuera del círculo $r = 6$.

Solución. Puntos de intersección:

$$4 - 4\cos\theta = 6 \Rightarrow -4\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

El área es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[(4-4\cos\theta)^2 - 36]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[16(1-\cos\theta)^2 - 36]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[16(1-2\cos\theta+\cos^2\theta) - 36]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[-20 - 32\cos\theta + 16\cos^2\theta]d\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[-20 - 32\cos\theta + 8(1+\cos 2\theta)]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}[-12 - 32\cos\theta + 8\cos 2\theta]d\theta$$

Integrando:

$$= \frac{1}{2}\left[-12\theta - 32\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}2\theta\right]_{2\pi/3}^{4\pi/3}$$

Evaluando (cálculo extenso):

$$A = 20\pi + 24\sqrt{3}$$

Respuesta: $20\pi + 24\sqrt{3}$

38. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones en el problema 37.

Solución. Esta es la región dentro de ambas curvas: dentro de $r = 6$ y dentro de $r = 4 - 4\cos\theta$.

Dado que $r = 6$ es siempre mayor que $r = 4 - 4\cos\theta$ (máximo de la cardioide es 8), el área común es simplemente el área de la cardioide:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4 - 4\cos\theta)^2 d\theta = 8\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$
$$= 8\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$
$$= 8\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 8\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$
$$= 8\left[\frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = 8(3\pi) = 24\pi$$

Respuesta: 24π

En los problemas 39–44, encuentre la longitud de la curva para los valores indicados de θ.

39.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$r = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Solución.

$$\frac{dr}{d\theta} = 0$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{3^2 + 0^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 3 d\theta = 3[2\pi] = 6\pi$$

Respuesta: 6π

40. $r = 6\cos\theta$, gráfica completa

Solución. Esta es un círculo. Para la gráfica completa, θ de 0 a π:

$$\frac{dr}{d\theta} = -6\operatorname{sen}\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(6\cos\theta)^2 + (-6\operatorname{sen}\theta)^2}d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{36\cos^2\theta + 36\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 6d\theta = 6\pi$$

Respuesta: 6π

41. $r = e^{\theta/2}, 0 \leq \theta \leq 4$

Solución.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}e^{\theta/2}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{(e^{\theta/2})^2 + \left(\frac{1}{2}e^{\theta/2}\right)^2}d\theta = \int_0^4 \sqrt{e^{\theta} + \frac{1}{4}e^{\theta}}d\theta$$

$$= \int_0^4 \sqrt{\frac{5}{4}e^{\theta}}d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 e^{\theta/2}d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left[2e^{\theta/2}\right]_0^4 = \sqrt{5}(e^2 - 1)$$

Respuesta: $\sqrt{5}(e^2 - 1)$

42. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 1$

Solución.

$$\frac{dr}{d\theta} = 1$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1}d\theta$$

Esta integral se resuelve por sustitución trigonométrica $\theta = \tan u$:

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan^2 u + 1}\sec^2 udu = \int_0^{\pi/4} \sec^3 udu$$

Usando fórmula de $\int \sec^3 udu = \frac{1}{2}(\sec u\tan u + \ln|\sec u + \tan u|)$:

$$= \frac{1}{2}\left[\sec u\tan u + \ln|\sec u + \tan u|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\cdot 1 + \ln(\sqrt{2} + 1) - (1\cdot 0 + \ln 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$$

Respuesta: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$

43. $r = 3 - 3\cos\theta$, gráfica completa

Solución. Cardioide completa, θ de 0 a 2π:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\operatorname{sen}\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3-3\cos\theta)^2 + (3\operatorname{sen}\theta)^2}d\theta = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}d\theta = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}d\theta$$

Usando $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$:

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}d\theta = 6\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(\theta/2)|d\theta$$

$$= 12\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u du = 12[-\cos u]_0^{\pi} = 12(2) = 24$$

Respuesta: 24

44. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), 0 \leq \theta \leq \pi$

Solución.

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2(\theta/3)\cos(\theta/3)\cdot\frac{1}{3} = \operatorname{sen}^2(\theta/3)\cos(\theta/3)$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^6(\theta/3) + \operatorname{sen}^4(\theta/3)\cos^2(\theta/3)}d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^4(\theta/3)(\operatorname{sen}^2(\theta/3) + \cos^2(\theta/3))}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(\theta/3)d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta/3)}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\theta/3)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\pi/3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Respuesta: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

45. Considere la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$.

(a) Explique por qué el área de la región acotada por la gráfica no está dada por la integral $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta d\theta$.

(b) Al utilizar una integral apropiada, determine el área de la región acotada por la gráfica.

(a) La integral $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta d\theta$ no es apropiada por las siguientes razones:

Solución. 1. Dominio de definición: La lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$ solo está definida cuando $\cos 2\theta \geq 0$, es decir, cuando:

$$2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Fuera de estos intervalos, $\cos 2\theta < 0$ y r^2 sería negativo, lo cual es imposible.

2. Valores negativos del integrando: En el intervalo $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $\cos 2\theta < 0$, por lo que el integrando sería negativo, lo que no tiene sentido para un área.

3. Simetría y repetición: La integral de 0 a 2π contaría algunas regiones múltiples veces y otras con signo negativo.

(b) Por simetría, calculamos el área de un lazo y multiplicamos por 2. Un lazo completo se barre cuando 2θ va de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, es decir, θ de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$.

$$A = 2 \times \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 9\cos 2\theta d\theta = 9\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$$

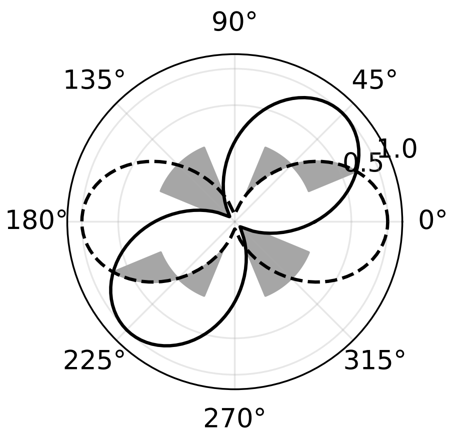
$$= 9\left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{9}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{2}(1 - (-1)) = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9$$

Respuesta: El área de la lemniscata es 9.

46. Dibuje la región común a los interiores de las gráficas de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \cos 2\theta$. Encuentre el área de esta región.

Solución.



Las rosas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \cos 2\theta$ tienen 4 pétalos cada una. La región común son 8 regiones pequeñas idénticas.

Encontramos los puntos de intersección:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \cos 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = 1$$
$$2\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Por simetría, calculamos el área de una región pequeña y multiplicamos por 8. Consideremos la región entre $\theta = \frac{\pi}{8}$ y $\theta = \frac{3\pi}{8}$, donde $r = \operatorname{sen} 2\theta$ es mayor.

El área de una región es:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \operatorname{sen}^2 2\theta d\theta$$

Área total:

$$A = 8 \times \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \operatorname{sen}^2 2\theta d\theta = 4\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \operatorname{sen}^2 2\theta d\theta$$

Usando $\operatorname{sen}^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$:

$$A = 4\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = 2\int_{\pi/8}^{3\pi/8} (1-\cos 4\theta) d\theta$$
$$= 2\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_{\pi/8}^{3\pi/8}$$

Evaluando:

$$= 2\left[\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\operatorname{sen}(3\pi/2)}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{4}\right)\right]$$
$$= 2\left[\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{2\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + 1$$

Respuesta: El área de la región común es $\frac{\pi}{2} + 1$

47. El área de la región que está acotada por la gráfica de la región de $r = 1+\cos\theta$ es $3\pi/2$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de las áreas acotadas por las gráficas de $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$? Justifique sus respuestas sin calcular las áreas utilizando (4).

Solución. Las curvas $r = 1+\cos\theta$, $r = 1-\cos\theta$, $r = 1+\operatorname{sen}\theta$, y $r = 1-\operatorname{sen}\theta$ son todas cardioides que se obtienen por rotaciones y reflexiones.

1. $r = 1 - \cos\theta$: Esta es una rotación de π radianes de $r = 1 + \cos\theta$, por lo que tiene la misma área:

$$A = \frac{3\pi}{2}$$

2. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$: Esta es una rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes de $r = 1 + \cos\theta$, por lo que tiene la misma área:

$$A = \frac{3\pi}{2}$$

3. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$: Esta es una rotación de $\frac{3\pi}{2}$ radianes (o reflexión) de $r = 1 + \cos\theta$, por lo que tiene la misma área:

$$A = \frac{3\pi}{2}$$

La justificación es que el área es invariante bajo rotaciones y reflexiones. La fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta$$

solo depende de los valores de $f(\theta)$, no de la orientación de la curva.

Respuesta: Todas las cardioides tienen la misma área $\dfrac{3\pi}{2}$.

48. ¿El área de la región acotada por la gráfica de $r = 2(1 + \cos\theta)$ es igual al doble del área de la región acotada por la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$?

Solución. Calculemos ambas áreas:

Para $r_1 = 1 + \cos\theta$:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(3\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

Para $r_2 = 2(1 + \cos\theta)$:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [2(1 + \cos\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4(1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$$

Observamos que:

$$A_2 = 3\pi = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 2A_1$$

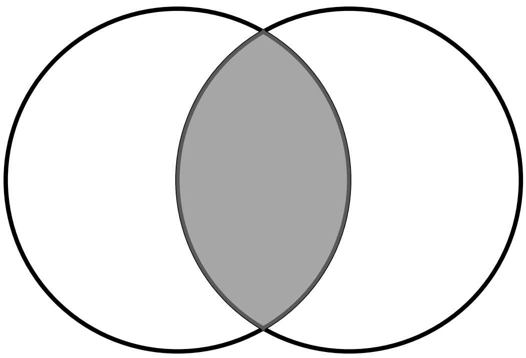
Respuesta: Sí, el área de $r = 2(1 + \cos\theta)$ es exactamente el doble del área de $r = 1 + \cos\theta$.

En general, si $r_2(\theta) = k \cdot r_1(\theta)$, entonces:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[k \cdot r_1(\theta)]^2 d\theta = k^2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r_1(\theta)]^2 d\theta = k^2 A_1$$

Por lo tanto, el área escala con el cuadrado del factor de escala.

49. Encuentre el área de la región sombreada en la figura siguiebte. Cada círculo tiene radio 1.



Solución. La figura muestra dos círculos de radio 1 que se intersectan. Por la simetría de la figura, podemos deducir que los centros de los círculos están separados por una distancia de 1 unidad (ya que cada círculo pasa por el centro del otro).

Paso 1: Configuración del problema

Colocamos los centros de los círculos en los puntos (0,0) y (1,0). Las ecuaciones de los círculos son:

- Círculo 1: $x^2 + y^2 = 1$
- Círculo 2: $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Paso 2: Encontrar puntos de intersección

Resolvemos el sistema:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

Restando (1) y (2):

$$x^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en (1):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Los puntos de intersección son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Paso 3: Área de la región de intersección

La región de intersección (región sombreada) consiste en dos segmentos circulares idénticos. Podemos calcular el área de un segmento y multiplicar por 2.

El área de un segmento circular con ángulo central θ en un círculo de radio R es:

$$A_{\text{segmento}} = \frac{R^2}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

En nuestro caso, $R = 1$ y el ángulo central para cada segmento es $\frac{2\pi}{3}$ (120°), ya que la distancia entre centros es 1 y los radios son 1, formando un triángulo equilátero.

Verificación: En el triángulo formado por los dos centros y un punto de intersección, todos los lados miden 1, por lo que es equilátero y los ángulos son $\frac{\pi}{3}$ (60°). El ángulo central es $2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Área de un segmento:

$$A_{\text{segmento}} = \frac{1^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Área total de intersección (dos segmentos):

$$A_{\text{total}} = 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Paso 4: Método alternativo usando integrales

También podemos calcular el área usando integración. La región de intersección es simétrica respecto al eje x, así que calculamos el área de la mitad superior y multiplicamos por 2.

Para $y \geq 0$, las funciones son:

- Del círculo 1: $x = \sqrt{1 - y^2}$
- Del círculo 2: $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$

El área de la mitad superior es:

$$A_{\text{mitad}} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\sqrt{1 - y^2} - (1 - \sqrt{1 - y^2})\right] dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[2\sqrt{1 - y^2} - 1\right] dy$$

Resolviendo la integral:

$$\int \sqrt{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y\right) + C$$

Evaluando de 0 a $\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y\right)\right]_0^{\sqrt{3}/2} - [y]_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0+0)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Área total $= 2 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Respuesta: El área de la región sombreada es $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

La forma general de una cónica con foco en el origen es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

donde e es la excentricidad y d es la distancia de la directriz al foco.

En los problemas 1–10, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y dibuje su gráfica.

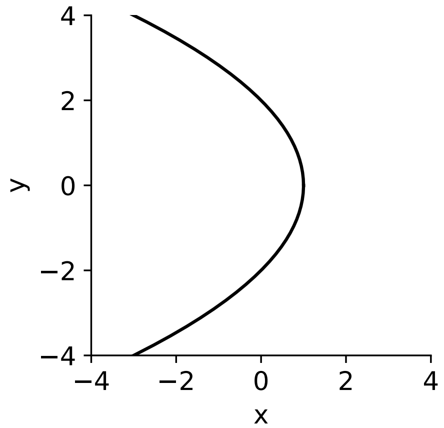
1.

$$r = \frac{2}{1 + \cos\theta}$$

Solución. Comparando con la forma general $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$:

$$e = 1, \quad ed = 2 \Rightarrow d = 2$$

Como $e = 1$, la cónica es una parábola.



2.

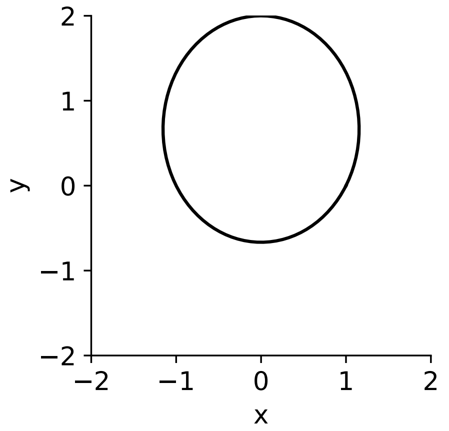
$$r = \frac{2}{2 - \mathrm{sen}\,\theta}$$

Solución. Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{2}{2 - \mathrm{sen}\,\theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{1 \cdot 1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$e = \frac{1}{2}, \quad ed = 1 \Rightarrow d = 2$$

Como $e = \frac{1}{2} < 1$, la cónica es una elipse.



3.

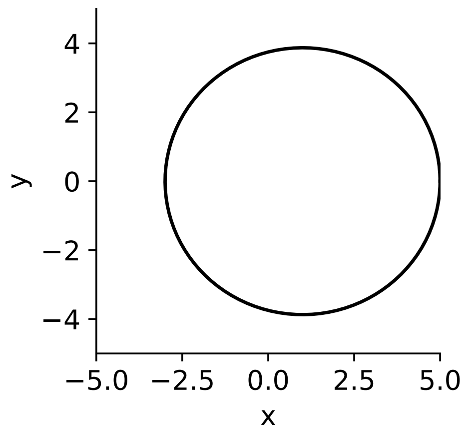
$$r = \frac{15}{4 - \cos\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{15}{4 - \cos\theta} = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \frac{1}{4}\cos\theta} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 15}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cos\theta}$$

$$e = \frac{1}{4}, \quad ed = \frac{15}{4} \Rightarrow d = 15$$

Como $e = \frac{1}{4} < 1$, la cónica es una elipse.



4.

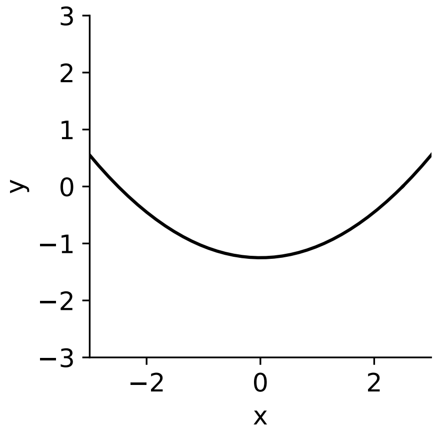
$$r = \frac{5}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{5}{2 - 2\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{1\cdot\frac{5}{2}}{1 + (-1)\operatorname{sen}\theta}$$

$$e = 1, \quad ed = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

Como $e = 1$, la cónica es una parábola.



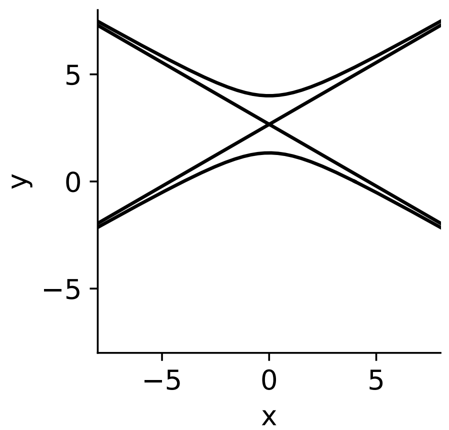
5.

$$r = \frac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Comparando con $r = \frac{ed}{1+e\operatorname{sen}\theta}$:

$$e = 2, \quad ed = 4 \Rightarrow d = 2$$

Como $e = 2 > 1$, la cónica es una hipérbola.



6.

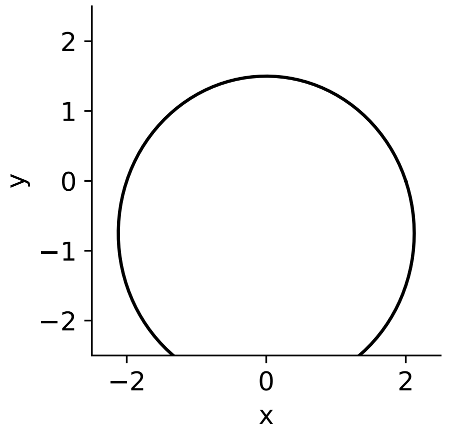
$$r = \frac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{1 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 6}{1 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

$$e = \frac{1}{3}, \quad ed = 2 \Rightarrow d = 6$$

Como $e = \frac{1}{3} < 1$, la cónica es una elipse.



7.

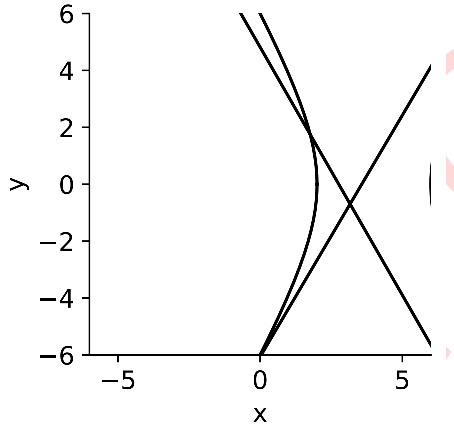
$$r = \frac{18}{3 + 6\cos\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{18}{3 + 6\cos\theta} = \frac{6}{1 + 2\cos\theta} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 2\cos\theta}$$

$$e = 2, \quad ed = 6 \Rightarrow d = 3$$

Como $e = 2 > 1$, la cónica es una hipérbola.



8.

$$r = \frac{6\sec\theta}{\sec\theta - 1}$$

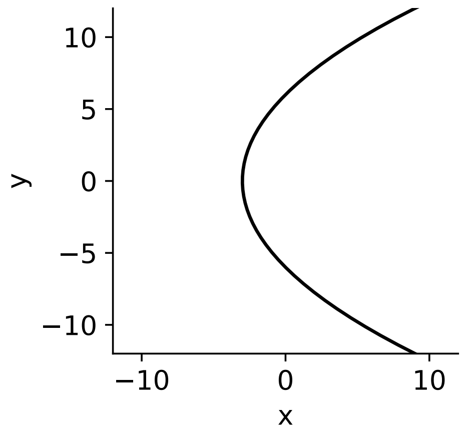
Solución. Simplificamos usando $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$:

$$r = \frac{6\sec\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{6}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - 1} = \frac{6}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{6}{1 - \cos\theta}$$

$$r = \frac{6}{1-\cos\theta} = \frac{1\cdot 6}{1+(-1)\cos\theta}$$

$$e = 1, \quad ed = 6 \Rightarrow d = 6$$

Como $e = 1$, la cónica es una parábola.



9.

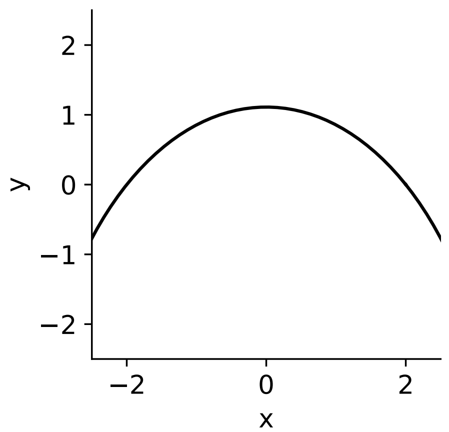
$$r = \frac{10}{5+4\operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{10}{5+4\operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{1+\frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}}{1+\frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta}$$

$$e = \frac{4}{5}, \quad ed = 2 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

Como $e = \frac{4}{5} < 1$, la cónica es una elipse.



10.

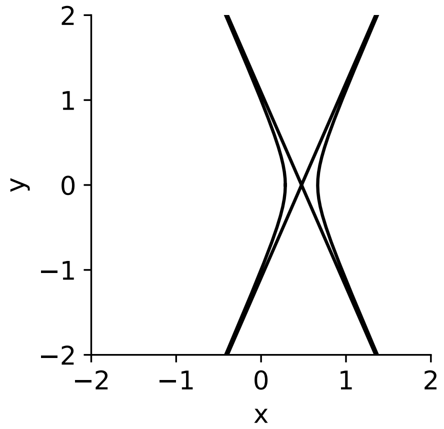
$$r = \frac{2}{2+5\cos\theta}$$

Solución. Reescribimos:

$$r = \frac{2}{2+5\cos\theta} = \frac{1}{1+\frac{5}{2}\cos\theta} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}}{1+\frac{5}{2}\cos\theta}$$

$$e = \frac{5}{2}, \quad ed = 1 \Rightarrow d = \frac{2}{5}$$

Como $e = \frac{5}{2} > 1$, la cónica es una hipérbola.



En los problemas 11–14, determine la excentricidad e de la cónica dada. Después convierta la ecuación polar en una ecuación rectangular y verifique que $e = c/a$.

11.

$$r = \frac{6}{1+2\operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Paso 1: Determinar la excentricidad

Comparando con la forma general $r = \frac{ed}{1+e\operatorname{sen}\theta}$:

$$e = 2, \quad ed = 6 \Rightarrow d = 3$$

La excentricidad es $e = 2$.

Paso 2: Convertir a coordenadas rectangulares

Partimos de:

$$r = \frac{6}{1+2\operatorname{sen}\theta}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(1+2\operatorname{sen}\theta) = 6$$

$$r + 2r\operatorname{sen}\theta = 6$$

Sustituimos $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $r\operatorname{sen}\theta = y$:

$$\sqrt{x^2+y^2} + 2y = 6$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 6-2y$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$x^2+y^2 = (6-2y)^2 = 36-24y+4y^2$$

$$x^2+y^2-36+24y-4y^2 = 0$$

$$x^2-3y^2+24y-36 = 0$$

Paso 3: Completar cuadrados y identificar la cónica

Agrupamos términos en y:

$$x^2-3(y^2-8y)-36 = 0$$

Completamos el cuadrado en y:

$$y^2-8y = (y-4)^2-16$$

Sustituimos:

$$x^2-3[(y-4)^2-16]-36 = 0$$

$$x^2-3(y-4)^2+48-36 = 0$$

$$x^2-3(y-4)^2+12 = 0$$

$$3(y-4)^2-x^2 = 12$$

Dividimos por 12:

$$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{x^2}{12} = 1$$

Esta es una hipérbola vertical con centro en $(0,4)$, donde:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

Para una hipérbola vertical: $c^2 = a^2+b^2 = 4+12 = 16 \Rightarrow c = 4$

Paso 4: Verificar que $e = c/a$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

Que coincide con la excentricidad encontrada en el Paso 1.

Respuesta: $e = 2$, y la ecuación rectangular es $\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{x^2}{12} = 1$

12.

$$r = \frac{10}{2-3\cos\theta}$$

Solución. Paso 1: Determinar la excentricidad

Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{10}{2 - 3\cos\theta} = \frac{5}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cos\theta}$$

$$e = \frac{3}{2}, \quad ed = 5 \Rightarrow d = \frac{10}{3}$$

La excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

Paso 2: Convertir a coordenadas rectangulares

Partimos de:

$$r = \frac{10}{2 - 3\cos\theta}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(2 - 3\cos\theta) = 10$$

$$2r - 3r\cos\theta = 10$$

Sustituimos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\cos\theta = x$:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 10$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 10 + 3x$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$4(x^2 + y^2) = (10 + 3x)^2 = 100 + 60x + 9x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 100 + 60x + 9x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 - 100 - 60x - 9x^2 = 0$$

$$-5x^2 + 4y^2 - 60x - 100 = 0$$

Paso 3: Completar cuadrados y identificar la cónica

Agrupamos términos en x:

$$-5(x^2 + 12x) + 4y^2 - 100 = 0$$

Completamos el cuadrado en x:

$$x^2 + 12x = (x + 6)^2 - 36$$

Sustituimos:

$$-5[(x + 6)^2 - 36] + 4y^2 - 100 = 0$$

$$-5(x + 6)^2 + 180 + 4y^2 - 100 = 0$$

$$-5(x + 6)^2 + 4y^2 + 80 = 0$$

$$5(x + 6)^2 - 4y^2 = 80$$

Dividimos por 80:

$$\frac{(x+6)^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$$

Esta es una hipérbola horizontal con centro en $(-6, 0)$, donde:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \quad b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

Para una hipérbola horizontal: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 20 = 36 \Rightarrow c = 6$

Paso 4: Verificar que $e = c/a$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Que coincide con la excentricidad encontrada en el Paso 1.

Respuesta: $e = \frac{3}{2}$, y la ecuación rectangular es $\frac{(x+6)^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

13.

$$r = \frac{12}{3 - 2\cos\theta}$$

Solución. Paso 1: Determinar la excentricidad

Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{12}{3 - 2\cos\theta} = \frac{4}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 6}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cos\theta}$$

$$e = \frac{2}{3}, \quad ed = 4 \Rightarrow d = 6$$

La excentricidad es $e = \frac{2}{3}$.

Paso 2: Convertir a coordenadas rectangulares

Partimos de:

$$r = \frac{12}{3 - 2\cos\theta}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(3 - 2\cos\theta) = 12$$

$$3r - 2r\cos\theta = 12$$

Sustituimos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\cos\theta = x$:

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 12$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 12 + 2x$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$9(x^2 + y^2) = (12 + 2x)^2 = 144 + 48x + 4x^2$$

$$9x^2 + 9y^2 = 144 + 48x + 4x^2$$
$$9x^2 + 9y^2 - 144 - 48x - 4x^2 = 0$$
$$5x^2 + 9y^2 - 48x - 144 = 0$$

Paso 3: Completar cuadrados y identificar la cónica

Agrupamos términos en x:

$$5(x^2 - \frac{48}{5}x) + 9y^2 - 144 = 0$$

Completamos el cuadrado en x:

$$x^2 - \frac{48}{5}x = \left(x - \frac{24}{5}\right)^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \left(x - \frac{24}{5}\right)^2 - \frac{576}{25}$$

Sustituimos:

$$5\left[\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 - \frac{576}{25}\right] + 9y^2 - 144 = 0$$

$$5\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 - \frac{2880}{25} + 9y^2 - 144 = 0$$
$$5\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + 9y^2 - \frac{3600}{25} = 0$$
$$5\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + 9y^2 = 144$$

Dividimos por 144:

$$\frac{\left(x - \frac{24}{5}\right)^2}{\frac{144}{5}} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Esta es una elipse horizontal con centro en $\left(\frac{24}{5}, 0\right)$, donde:

$$a^2 = \frac{144}{5} \Rightarrow a = \frac{12}{\sqrt{5}}, \quad b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

Para una elipse horizontal: $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{144}{5} - 16 = \frac{144}{5} - \frac{80}{5} = \frac{64}{5} \Rightarrow c = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Paso 4: Verificar que $e = c/a$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{\frac{12}{\sqrt{5}}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Que coincide con la excentricidad encontrada en el Paso 1.

Respuesta: $e = \frac{2}{3}$, y la ecuación rectangular es $\frac{\left(x-\frac{24}{5}\right)^2}{\frac{144}{5}} + \frac{y^2}{16} = 1$

14.

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$$

Solución. Paso 1: Determinar la excentricidad

Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta}$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad ed = 2 \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$$

La excentricidad es $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Paso 2: Convertir a coordenadas rectangulares

Partimos de:

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta) = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}r + r\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{3}$$

Sustituimos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\operatorname{sen}\theta = y$:

$$\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} + y = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3} - y$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$3(x^2 + y^2) = (2\sqrt{3} - y)^2 = 12 - 4\sqrt{3}y + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 = 12 - 4\sqrt{3}y + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12 + 4\sqrt{3}y - y^2 = 0$$

$$3x^2 + 2y^2 + 4\sqrt{3}y - 12 = 0$$

Paso 3: Completar cuadrados y identificar la cónica

Agrupamos términos en y:

$$3x^2 + 2(y^2 + 2\sqrt{3}y) - 12 = 0$$

Completamos el cuadrado en y:

$$y^2 + 2\sqrt{3}y = (y + \sqrt{3})^2 - 3$$

Sustituimos:

$$3x^2 + 2[(y + \sqrt{3})^2 - 3] - 12 = 0$$

$$3x^2 + 2(y + \sqrt{3})^2 - 6 - 12 = 0$$

$$3x^2 + 2(y + \sqrt{3})^2 - 18 = 0$$

$$3x^2 + 2(y + \sqrt{3})^2 = 18$$

Dividimos por 18:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{(y + \sqrt{3})^2}{9} = 1$$

Esta es una elipse vertical con centro en $(0, -\sqrt{3})$, donde:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \quad b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6}$$

Para una elipse vertical: $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Paso 4: Verificar que $e = c/a$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Que coincide con la excentricidad encontrada en el Paso 1.

Respuesta: $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$, y la ecuación rectangular es $\frac{x^2}{6} + \frac{(y+\sqrt{3})^2}{9} = 1$

En los problemas 15–20, encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el origen que satisfaga las condiciones dadas.

Fórmulas para ecuaciones polares

- Directriz vertical derecha $x = d$: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$
- Directriz vertical izquierda $x = -d$: $r = \frac{ed}{1-e\cos\theta}$
- Directriz horizontal superior $y = d$: $r = \frac{ed}{1+e\operatorname{sen}\theta}$
- Directriz horizontal inferior $y = -d$: $r = \frac{ed}{1-e\operatorname{sen}\theta}$

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

Solución. Directriz vertical derecha: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$

$$r = \frac{1 \cdot 3}{1 + 1\cos\theta} = \frac{3}{1 + \cos\theta}$$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

Solución. Directriz horizontal superior: $r = \frac{ed}{1+e\,\operatorname{sen}\theta}$

$$r = \frac{\frac{3}{2}\cdot 2}{1+\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta} = \frac{3}{1+\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

Solución. Directriz horizontal inferior: $r = \frac{ed}{1-e\,\operatorname{sen}\theta}$

$$r = \frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

Solución. Directriz vertical derecha: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

Solución. Directriz vertical derecha: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$

$$r = \frac{2\cdot 6}{1+2\cos\theta} = \frac{12}{1+2\cos\theta}$$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

Solución. Directriz horizontal inferior: $r = \frac{ed}{1-e\,\operatorname{sen}\theta}$

$$r = \frac{1\cdot 2}{1-1\operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{1-\operatorname{sen}\theta}$$

21. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 15 si la gráfica se rota en dirección de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $2\pi/3$.

Solución. Del problema 15: $r = \frac{3}{1+\cos\theta}$

Una rotación en sentido horario de $\frac{2\pi}{3}$ equivale a reemplazar θ por $\theta + \frac{2\pi}{3}$:

$$r = \frac{3}{1+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

22. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 16 si la gráfica se rota en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/6$.

Solución. Del problema 16: $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

La ecuación polar original es:

$$r = \frac{3}{1 + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

Una rotación en sentido antihorario de $\frac{\pi}{6}$ equivale a reemplazar θ por $\theta - \frac{\pi}{6}$:

$$r = \frac{3}{1 + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$$

Respuesta: $r = \dfrac{3}{1 + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)}$

En los problemas 23–28, encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice dado. Para una parábola ($e = 1$) con foco en el origen:

- La distancia del foco al vértice es p
- La distancia del foco a la directriz es $2p$
- La ecuación polar general es $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ o $r = \dfrac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

23. Vértice: $\left(\frac{3}{2}, 3\pi/2\right)$

Solución. El vértice está en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (eje y negativo). La distancia del foco al vértice es $p = \frac{3}{2}$.

Para una parábola vertical con vértice en el eje y negativo, la directriz es horizontal superior $y = p = \frac{3}{2}$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 1\operatorname{sen}\theta} = \frac{3}{1 + \operatorname{sen}\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{3}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

24. Vértice: $(2, \pi)$

Solución. El vértice está en $\theta = \pi$ (eje x negativo). La distancia del foco al vértice es $p = 2$.

Para una parábola horizontal con vértice en el eje x negativo, la directriz es vertical derecha $x = p = 2$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{1 \cdot 4}{1 + 1\cos\theta} = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

25. Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$

Solución. El vértice está en $\theta = \pi$ (eje x negativo). La distancia del foco al vértice es $p = \frac{1}{2}$.

Para una parábola horizontal con vértice en el eje x negativo, la directriz es vertical derecha $x = p = \frac{1}{2}$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1\cos\theta} = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

26. Vértice: $(2, 0)$

Solución. El vértice está en $\theta = 0$ (eje x positivo). La distancia del foco al vértice es $p = 2$.

Para una parábola horizontal con vértice en el eje x positivo, la directriz es vertical izquierda $x = -p = -2$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} = \frac{1 \cdot 2}{1 - 1\cos\theta} = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

27. Vértice: $\left(\frac{1}{4}, 3\pi/2\right)$

Solución. El vértice está en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (eje y negativo). La distancia del foco al vértice es $p = \frac{1}{4}$.

Para una parábola vertical con vértice en el eje y negativo, la directriz es horizontal superior $y = p = \frac{1}{4}$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 1\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \text{sen}\,\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{1}{2(1 + \text{sen}\,\theta)}$

28. Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \pi/2\right)$

Solución. El vértice está en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eje y positivo). La distancia del foco al vértice es $p = \frac{3}{2}$.

Para una parábola vertical con vértice en el eje y positivo, la directriz es horizontal inferior $y = -p = -\frac{3}{2}$, y la ecuación es:

$$r = \frac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1 \cdot 3}{1 - 1\,\text{sen}\,\theta} = \frac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$$

Respuesta: $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$

- Vértice en eje x positivo ($\theta = 0$): $r = \dfrac{2p}{1 - \cos\theta}$
- Vértice en eje x negativo ($\theta = \pi$): $r = \dfrac{2p}{1 + \cos\theta}$
- Vértice en eje y positivo ($\theta = \pi/2$): $r = \dfrac{2p}{1 - \operatorname{sen}\theta}$
- Vértice en eje y negativo ($\theta = 3\pi/2$): $r = \dfrac{2p}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 29–32, encuentre las coordenadas polares de los vértices o vértice de la cónica rotada que se indica.

Para una cónica en forma polar $r = \frac{ed}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ o $r = \frac{ed}{1+e\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)}$:

- Los vértices ocurren donde el denominador es máximo o mínimo
- Para $\cos(\theta - \theta_0)$: máximo en $\theta - \theta_0 = 0$, mínimo en $\theta - \theta_0 = \pi$
- Para $\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$: máximo en $\theta - \theta_0 = \pi/2$, mínimo en $\theta - \theta_0 = 3\pi/2$

29.

$$r = \frac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$$

Solución. Identificamos los parámetros:

$$e = 1 \quad \text{(parábola)}, \quad ed = 4 \Rightarrow d = 4, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

Para una parábola con término $\cos(\theta - \theta_0)$, hay un solo vértice que ocurre donde el denominador es máximo, es decir, cuando $\cos(\theta - \pi/4) = 1$:

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

El valor de r en este punto es:

$$r = \frac{4}{1 + \cos(0)} = \frac{4}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Respuesta: El vértice está en $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

30.

$$r = \frac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$$

Solución. Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)} = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos(\theta - \pi/3)}$$

Identificamos los parámetros:

$$e = \frac{2}{3} \quad \text{(elipse)}, \quad ed = \frac{5}{3} \Rightarrow d = \frac{5}{2}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

Para una elipse con término $\cos(\theta - \theta_0)$, los vértices ocurren donde el denominador es máximo y mínimo:

Vértice 1: $\cos(\theta - \pi/3) = 1$

$$\theta - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$r = \frac{5}{3 + 2\cos(0)} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

Vértice 2: $\cos(\theta - \pi/3) = -1$

$$\theta - \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$r = \frac{5}{3 + 2\cos(\pi)} = \frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$$

Respuesta: Los vértices están en $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$

31.

$$r = \frac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$$

Solución

Reescribimos en forma estándar:

$$r = \frac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)} = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$$

Identificamos los parámetros:

$$e = \frac{1}{2} \quad \text{(elipse)}, \quad ed = 5 \Rightarrow d = 10, \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{6}$$

Para una elipse con término $\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$, los vértices ocurren donde el denominador es máximo y mínimo:

Vértice 1: $\operatorname{sen}(\theta + \pi/6) = -1$ (denominador máximo)

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$r = \frac{10}{2 - \operatorname{sen}(3\pi/2)} = \frac{10}{2 - (-1)} = \frac{10}{3}$$

Vértice 2: $\operatorname{sen}(\theta + \pi/6) = 1$ (denominador mínimo)

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$r = \frac{10}{2 - \operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{10}{2 - 1} = \frac{10}{1} = 10$$

Respuesta: Los vértices están en $\left(\frac{10}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(10, \frac{\pi}{3}\right)$

$$r = \frac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)}$$

Solución. Identificamos los parámetros:

$$e = 2 \quad \text{(hipérbola)}, \quad ed = 6 \Rightarrow d = 3, \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{3}$$

Para una hipérbola con término $\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$, los vértices ocurren donde el denominador es máximo:

Vértice 1: $\operatorname{sen}(\theta + \pi/3) = -1$ (denominador máximo)

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$r = \frac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(3\pi/2)} = \frac{6}{1 + 2(-1)} = \frac{6}{1 - 2} = \frac{6}{-1} = -6$$

Como $r < 0$, usamos la propiedad $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$:

$$(-6, \frac{7\pi}{6}) = (6, \frac{7\pi}{6} + \pi) = (6, \frac{13\pi}{6}) = (6, \frac{\pi}{6})$$

Vértice 2: El otro vértice está diametralmente opuesto:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}, \quad r = 6$$

Pero este es el mismo punto que ya encontramos. Para una hipérbola con $e > 1$ y término sen, hay solo un vértice en la rama principal.

Verificamos el otro extremo: $\operatorname{sen}(\theta + \pi/3) = 1$

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$r = \frac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{6}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2$$

Este es un punto en la otra rama de la hipérbola.

Respuesta: Los vértices están en $\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

1. Reescribir la ecuación en forma estándar $r = \frac{ed}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ o $r = \frac{ed}{1+e\,\text{sen}(\theta-\theta_0)}$
2. Identificar e, ed, θ_0
3. Para $\cos(\theta - \theta_0)$:
   - Vértice 1: $\theta - \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0$
   - Vértice 2: $\theta - \theta_0 = \pi \Rightarrow \theta = \theta_0 + \pi$
4. Para $\text{sen}(\theta - \theta_0)$:
   - Vértice 1: $\theta - \theta_0 = 3\pi/2 \Rightarrow \theta = \theta_0 + 3\pi/2$
   - Vértice 2: $\theta - \theta_0 = \pi/2 \Rightarrow \theta = \theta_0 + \pi/2$
5. Calcular r en cada vértice
6. Ajustar coordenadas si $r < 0$ usando $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$