MATRICES

Ejercicio 0.1 *Multiplicar las siguientes matrices*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$A\,B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 12 & 15 - 2 \\ 3 + 6 & 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 13 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 & -6 + 1 \\ -3 + 4 & -9 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (tamaño 3×3) y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (tamaño 3×2). El producto $A\,B$ será 3×2:

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4 + 1 & 1 + 2 - 2 \\ -2 + 2 + 2 & 2 + 1 - 4 \\ -1 + 2 - 1 & 1 + 1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ambos son 3×3. El producto $C = AB$ también es 3×3:

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -1 + 2 + 1 = 2, \\
C_{1,2} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 + 1 = 4, \\
C_{1,3} &= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 2 + 1 = 7, \\
C_{2,1} &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -2 + 2 + 1 = 1, \\
C_{2,2} &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 + 1 = 6, \\
C_{2,3} &= 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 2 + 1 = 11, \\
C_{3,1} &= 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -1 - 4 + 4 = -1, \\
C_{3,2} &= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 - 2 + 4 = 4, \\
C_{3,3} &= 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4 - 4 + 4 = 4.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 11 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

e) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (tamaño 3×2) y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (tamaño 2×3). El producto es 3×3:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

f) Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. El producto $M \cdot M$ se obtiene por:

$$M \cdot M = M^2 = \begin{pmatrix} a \cdot a + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ c \cdot a + d \cdot c & c \cdot b + d \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.2 *Efectuar las siguientes operaciones con matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$

d) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A^2 = A{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 3 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 2+1 \\ 6+3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Para calcular B^3, primero calculamos B^2:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+3 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, tenemos:

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 5\cdot 1 & 5\cdot 1 + 5\cdot 3 \\ 5\cdot 2 + 10\cdot 1 & 5\cdot 1 + 10\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+5 & 5+15 \\ 10+10 & 5+30 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

c) Sea $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculamos C^2:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot(-4) & 3\cdot 2 + 2\cdot(-2) \\ -4\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) & -4\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9-8 & 6-4 \\ -12+8 & -8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos C^3:

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) \\ -4\cdot 3 + (-4)\cdot(-4) & -4\cdot 2 + (-4)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3-8 & 2-4 \\ -12+16 & -8+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos C^4:

$$C^4 = C^3 \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5)\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) & (-5)\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) \\ 4\cdot 3 + 0\cdot(-4) & 4\cdot 2 + 0\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -15+8 & -10+4 \\ 12+0 & 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculamos C^5:

$$C^5 = C^4 \cdot C = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\cdot 3 + (-6)\cdot(-4) & -7\cdot 2 + (-6)\cdot(-2) \\ 12\cdot 3 + 8\cdot(-4) & 12\cdot 2 + 8\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -21+24 & -14+12 \\ 36-32 & 24-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

d) Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz es triangular superior con valores 1 en la diagonal. Se puede demostrar por inducción (Hágalo) que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Sea $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Esta matriz representa la rotación en el plano por un ángulo φ. Al tomar la n-ésima potencia, se obtiene la rotación por $n\varphi$. Esto es:

$$R^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.3 *Hallar*

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n,$$

donde α es un número real.

Solución. Sea

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$M_n = I + \frac{\alpha}{n} J, \quad \text{donde } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $J^2 = I$. Al tomar la potencia n-ésima y hacer $n \to \infty$, se emplea el análogo matricial de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$. En el caso de matrices,

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{\alpha}{n} J\right)^n = \exp(\alpha\, J).$$

Dado que $J^2 = I$, la *exponencial de matriz* $\exp(\alpha J)$ se puede calcular mediante la fórmula para una matriz cuyo cuadrado es la identidad:

$$e^{\alpha J} = I\, \cosh(\alpha) + J\, \sinh(\alpha).$$

Explicitando, obtenemos

$$\cosh(\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh(\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.4 *Demostrar que si A y B son matrices que* conmutan *($AB = BA$), entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$

b) $A^2 - B^2 = (A+B)\,(A-B)$

c) $(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n$.

Solución. El punto clave es que A y B *conmutan*: $AB = BA$. Esto permite extender las fórmulas usuales del binomio a matrices.

a) Tenemos:
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$
Como $AB = BA$, se agrupan los términos para obtener
$$(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2.$$

b) Para demostrar que $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, expandimos el lado derecho:
$$(A-B)(A+B) = A(A+B) - B(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2.$$
Debido a que $AB = BA$, queda:
$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2.$$

c) La demostración de la fórmula
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k,$$
se realiza por inducción o se ve análoga a la binomial ordinaria, pues la conmutatividad garantiza que todos los productos se reordenen sin cambiar de signo ni de posición. Por lo que, si $AB = BA$, entonces:
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Ejercicio 0.5 *Calcular $AB - BA$ en cada caso:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) Primero calculamos AB:
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot1 \\ 1\cdot4+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 & 4+1 \\ 4+2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$
Luego BA:
$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot1+2\cdot2 \\ 1\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+2 & 4+4 \\ 2+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Por tanto,
$$AB - BA = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-10 & 5-8 \\ 6-3 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Primero, calculamos AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 & -4+2 \\ 3-8 & -2+4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 3-4 \\ -8+2 & -4+4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 & -2-(-1) \\ -5-(-6) & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.6 *Dada* $f(x) = x^2 - x - 1$ *y* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar* $f(A)$.

Solución. Para calcular $f(A) = A^2 - A - I$, se necesitan A^2 y A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$f(A) = A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo la resta componente a componente, resulta:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 5-2-1 & 4-1-0 \\ 4-1-0 & 5-2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.7 *Demostrar que toda matriz de segundo orden* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *satisface la ecuación* $x^2 - (a+d)\,x + (ad-bc) = 0$.

Solución. La afirmación equivale a comprobar que

$$A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,I = 0,$$

donde 0 representa la matriz nula.

Calculemos A^2, $-(a+d)\,A$ y $(ad-bc)\,I$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b\,c & a\,b + b\,d \\ c\,a + d\,c & c\,b + d^2 \end{pmatrix}.$$

$$-(a+d)\,A = -(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a+d)\,a & -(a+d)\,b \\ -(a+d)\,c & -(a+d)\,d \end{pmatrix}.$$

$$(ad-bc)\,I = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

Luego, calculemos las entradas de la expresión matricial $A^2 \;-\; (a+d)\,A \;+\; (ad-bc)\,I$:

Entrada $(1,1)$:

$$(a^2+bc) \;-\; (a+d)\,a \;+\; (ad-bc) = a^2+bc \;-\; a^2-ad \;+\; ad-bc = 0.$$

Entrada (1,2):

$$(a\,b+b\,d) \;-\; (a+d)\,b \;+\; 0 = ab+bd-ab-db = 0.$$

Entrada (2,1):

$$(c\,a+d\,c) \;-\; (a+d)\,c \;+\; 0 = ca+dc-ac-dc = 0.$$

Entrada (2,2):

$$(c\,b+d^2) \;-\; (a+d)\,d \;+\; (ad-bc) = cb+d^2-ad-d^2+ad-bc = cb-bc = 0.$$

Todas las entradas resultan 0, por lo que

$$A^2 \;-\; (a+d)\,A \;+\; (ad-bc)\,I = 0.$$

Quedando demostrado que la matriz A cumple la ecuación polinómica:

$$x^2 \;-\; (a+d)\,x \;+\; (ad-bc) \;=\; 0.$$

Ejercicio 0.8 *Resolver y discutir la ecuación $X\,A = 0$, donde A es una matriz 2×2 dada y X es la incógnita (también 2×2).*

Solución. Sea A una matriz 2×2. Queremos todas las X tales que $X\,A = 0$. Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\det(A) \neq 0$. Si A es invertible, la única solución es $X = 0$. Efectivamente, $X\,A = 0 \implies X = 0\cdot A^{-1} = 0$.

Caso 2: $\det(A) = 0$. Entonces $\operatorname{rank}(A)$ es 1 o 0.

1. Si $A = 0$, toda X satisface $X\,0 = 0$. Entonces *cualquier* 2×2 matriz es solución.
2. Si $\operatorname{rank}(A) = 1$, se puede describir A como $u\,v^T$ (producto de un vector columna y un vector fila). Entonces $X\,A = X(u\,v^T) = (X\,u)\,v^T$. Para que sea cero, $(X\,u) = 0$. Esto significa que $\operatorname{Im}(X) \subseteq \{u\}^\perp$. Se obtiene un espacio de soluciones parametrizado por la dimensión de $\{u\}^\perp$.

Ejercicio 0.9 *Hallar la matriz inversa de A en cada uno de los siguientes casos:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solución.

a) Para una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de orden 2×2, la inversa (si existe) viene dada por la fórmula:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso, $a = 1,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 5$. Por lo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ es:

$$\det(A) = (1)(5) - (2)(2) = 5 - 4 = 1.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Mientras $\det(A) = ad - bc \neq 0$, la inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.10 *Hallar la matriz incógnita X en cada una de las siguientes ecuaciones de matrices.*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. La ecuación $A\,X = B$ implica

$$X = A^{-1}\,B,$$

siempre que A sea invertible ($\det(A) \neq 0$).

Paso 1. Cálculo del determinante de A:

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1.$$

Como $\det(A) = 1 \neq 0$, A es invertible.

Paso 2. Calculamos la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Realizamos la multiplicación $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Se calculan las entradas del producto del segundo miembro de (1):

Entrada $(1,1)$:

$$3 \cdot (-4) + (-5) \cdot 1 = -12 - 5 = -17.$$

Entrada $(1,2)$:

$$3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-3) = 18 + 15 = 33.$$

Entrada $(2,1)$:

$$(-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6.$$

Entrada $(2,2)$:

$$(-1) \cdot 6 + 2 \cdot (-3) = -6 - 6 = -12.$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -17 & 33 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. La ecuación $X \cdot A = B$ implica:

$$X = B \cdot A^{-1}. \tag{2}$$

siempre que A sea invertible, es decir, $\det(A) \neq 0$.

Para realizar el producto del segundo miembro de la igualdad (2), efectuamos los siguientes pasos:

1. Se calcula el determinante de la matriz A:

$$\det(A) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

2. Se calcula la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Se realiza la multiplicación $B\,A^{-1}$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

4. Se calculan las entradas del producto del segundo miembro de (3):

   Entrada $(1,1)$:

$$(-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3.$$

   Entrada $(1,2)$:

$$(-1)\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -1 - 6 = -7.$$

   Entrada $(2,1)$:

$$2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 4.$$

   Entrada $(2,2)$:

$$2\cdot 1 + 4\cdot(-2) = 2 - 8 = -6.$$

   Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. La ecuación $A\cdot X = A$ implica:

$$X = A^{-1}\cdot A, \tag{4}$$

siempre que A sea invertible, es decir, $\det(A) \neq 0$.

Dado que $\det(A) = 2\cdot 1 - 1\cdot 2 = 0$, A *no* es invertible. Esto significa que la inversa de la matriz A (A^{-1}) no existe. Así que no podemos realizar el producto por $A^{-1}\cdot A$.

En cambio, si reescribimos la ecuación $A\cdot X = A$ como

$$A\,X - A = 0 \implies A\,(X - I) = 0, \tag{5}$$

y luego definimos $Y = X - I$, la ecuación (5) se transforma en:

$$A\,Y = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) nos da el conjunto de todas las matrices Y que anulan a A por la izquierda. Sea

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Entonces

$$A\,Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_{11} + y_{21} & 2y_{12} + y_{22} \\ 2y_{11} + y_{21} & 2y_{12} + y_{22} \end{pmatrix}.$$

Para que esto sea la matriz nula, necesitamos que:

$$2y_{11} + y_{21} = 0, \tag{8}$$
$$2y_{12} + y_{22} = 0. \tag{9}$$

Para resolver el sistema lineal de ecuaciones (8)-(9), usamos la parametrización:

$$y_{21} = -2\,y_{11}, \quad y_{22} = -2\,y_{12}.$$

Por lo que, según (7), tenemos:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ -2\,y_{11} & -2\,y_{12} \end{pmatrix}.$$

Puesto que $Y = X - I$, tenemos

$$X = I + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ -2\,y_{11} & -2\,y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y_{11} & y_{12} \\ -2\,y_{11} & 1-2\,y_{12} \end{pmatrix}.$$

Definiendo parámetros libres $\alpha = y_{11}$ y $\beta = y_{12}$, las soluciones son

$$X = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ -2\,\alpha & 1-2\,\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ese es el conjunto de *todas* las soluciones a $A\,X = A$ cuando A no es invertible pero tiene rango 1.

d) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la ecuación $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se reescribe como $X \cdot A = I$. Si tal X existiera, multiplicando determinantes daría

$$\det(X\,A) = \det(X)\,\det(A) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(X)\,\det(A) = 1.$$

Como $\det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$, entonces $\det(X) \cdot 0 = 1$. Lo cual es imposible. Por lo tanto, *no hay soluciones*.

Ejercicio 0.11 *Demostrar que si A y B son matrices que conmutan ($AB = BA$), entonces*

$$A^{-1}B \;=\; B\,A^{-1}.$$

Solución. Dada la igualdad $AB = BA$, suponiendo A invertible ($\det(A) \neq 0$), multiplicamos a izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}(AB) \;=\; A^{-1}(BA) \;\Longrightarrow\; (A^{-1}A)B \;=\; A^{-1}B\,A \;\Longrightarrow\; B \;=\; A^{-1}B\,A.$$

Ahora multiplicamos a derecha por A^{-1}:

$$B\,A^{-1} \;=\; A^{-1}BAA^{-1} \Rightarrow B\,A^{-1} \;=\; A^{-1}B.$$

Por tanto:

$$A^{-1}B = B\,A^{-1}, \quad \text{si } AB = BA \text{ y } A \text{ es invertible.}$$

Ejercicio 0.12 *Calcular $\varphi(A)$, donde $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$ y*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para una función racional $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, la expresión matricial se define como

$$\varphi(A) = (I + A)\,(I - A)^{-1},$$

si $(I - A)$ es invertible.

Para calcular $\varphi(A)$, damos los siguientes pasos:

1. *Verificar invertibilidad de $I - A$*:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1-1 & 0-2 \\ 0-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $\det(I - A) = (0)(0) - (-2)(-2) = -4 \neq 0$. Por tanto, $I - A$ es invertible.

2. *Calcular* (I + A):

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *Multiplicar:* $\varphi(A) = (I + A)(I - A)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Por tanto:

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.13 *Multiplicar las siguientes matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de tamaño 2×3), $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (de tamaño 3×2). El producto $C = A \cdot B$ será una matriz 2×2 de la forma

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus entradas:

Entrada $(1,1)$:

$$C_{1,1} = (2)(3) + (1)(2) + (1)(1) = 6 + 2 + 1 = 9.$$

Entrada $(1,2)$:

$$C_{1,2} = (2)(1) + (1)(1) + (1)(0) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

Entrada $(2,1)$:

$$C_{2,1} = (3)(3) + (0)(2) + (1)(1) = 9 + 0 + 1 = 10.$$

Entrada $(2,2)$:

$$C_{2,2} = (3)(1) + (0)(1) + (1)(0) = 3 + 0 + 0 = 3.$$

Por tanto:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$