ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 0.1 *En* $\mathbb{R}^2$ *se definen las operaciones:*

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$$
$$\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)\,,$$

para (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Analice si* $\mathbb{R}^2$ *con estas dos operaciones es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 0.2 *En* $\mathbb{R}^n$ *se definen las operaciones:*

$$a \oplus b = a - b,$$
$$\alpha \odot a = -\alpha a,$$

para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *¿Cuales de los axiomas de espacio vectorial satisface* $\mathbb{R}^n$ *con estas dos operaciones?*

Ejercicio 0.3 *En* $K^2(\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$ *se definen:*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c),$$
$$\alpha \odot (a, b) = (\alpha a, \alpha b),$$

para (a, b), $(c, d) \in K^2$, $\alpha \in K$. *¿Constituye* K^2 *con estas operaciones un espacio vectorial sobre* K*?*

Ejercicio 0.4 *Sean* $E = \mathbb{R}^*_+$, $K = \mathbb{R}$. *Se definen las operaciones:*

$$a \oplus b = ab,$$
$$\alpha \odot a = a^a,$$

para $a, b \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *¿Constituye* E *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*?*

Ejercicio 0.5 *En* K^2 *se definen las operaciones:*

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)\,,$$
$$\alpha\,(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0)\,,$$

para (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *¿Es* K^2 *con estas operaciones un espacio vectorial sobre* K*?*

Ejercicio 0.6 *En el espacio de las matrices reales de orden* 3, $M_3(\mathbb{R})$, *diga cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de* $M_3(\mathbb{R})$.

a) *El de las matrices. simétricas.*

b) *El de las matrices antisimétricas.*

c) *El de las matrices que tienen la diagonal principal nula.*

d) *El de las matrices triangulares superiores.*

e) *El de las matrices triangulares inferiores.*

f) *El de las matrices* A *que cumplan* $A = A^2$.

g) *El de las matrices nilpotentes, es decir, tales que existe un entero k tal que $A^k = 0$.*

h) *El de las matrices de determinante 0.*

i) *El de las matrices de traza 0.*

j) *El de las matrices que conmutan con A, dada una matriz fija A.*

k) *El de las matrices inversibles.*

Ejercicio 0.7 *Exprese, si es posible, el vector v como combinación lineal de los vectores del sistema (e_i).*

a) *En $\mathbb{R}^3$: $v = (1, -2, 5)$; $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$, $e_3 = (2, -1, 1)$.*

b) *En $\mathbb{R}^3$: $v = (2, -5, 3)$; $e_1 = (1, -3, 2)$, $e_2 = (2, -4, -1)$, $e_3 = (1, -5, 7)$.*

c) *En $\mathbb{R}^4$: $v = (3, -1, 0, -1)$; $e_1 = (2, -1, 3, 2)$, $e_2 = (-1, 1, 1, -3)$, $e_3 = (1, 1, 9, -5)$.*

d) *En $\mathbb{R}^3$: $v = (-1, 1, 2)$; $e_1 = (3, 0, -3)$, $e_2 = (4, 2, -2)$, $e_3 = (2, 1, 1)$.*

Ejercicio 0.8 *¿Para qué valores del parámetro k se puede escribir el vector $v = (1, k, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $a_1 = (3, -2, 0)$, $a_2 = (2, -5, -1)$? ¿Qué interpretación geométrica se puede dar en este caso?*

Ejercicio 0.9 *En el espacio $\mathbb{R}_3[x]$, escriba el polinomio $p(x) = -3 + 4x + x^2$ como combinación lineal de los polinomios: $q_1(x) = 5 - 2x + x^2$, $q_2(x) = -3x + x^2$, $q_3 = 3 + x$.*

Ejercicio 0.10 *En el espacio $M_2(\mathbb{R})$, exprese la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

como combinación lineal de las matrices:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.11 *Determine si la siguiente aplicación constituye un isomorfismo del espacio vectorial K^2 (con las operaciones usuales) en sí mismo:*

$$f : K^2 \to K^2, \quad f(x, y) = (x + y, x - y).$$

Ejercicio 0.12 *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre K, ϕ un isomorfismo de E sobre F. Demuestre que la aplicación Φ de $E \times F$ en $E \times F$ definida por $\Phi(x, y) = (x, y - \phi(x))$ es un isomorfismo.*

Ejercicio 0.13 *Diga cuáles de los siguientes sistemas de vectores son linealmente independientes:*

a) *En $\mathbb{R}^3$, el sistema $((1, -2, 5), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1))$.*

b) *En $\mathbb{R}^3$, el sistema $((2, -5, 3), (1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7))$.*

c) *En $\mathbb{R}^4$, el sistema $((1, -1, -4, 0), (1, 1, 2, 4), (2, -1, -5, 2), (2, 1, 1, 6))$.*

d) En $\mathbb{R}^4$, el sistema $((1,2,-1,-2),(2,3,0,-1),(1,2,1,4),(1,3,-1,0))$.

Ejercicio 0.14 *Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que represente cada uno de los subespacios siguientes:*

a) En $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por $\{(1,2,0),(0,1,0)\}$.

b) En $\mathbb{R}^4$, el subespacio generado por $\{(2,1,-3,0),(3,0,2,-5),(1,-1,1,1)\}$.

Ejercicio 0.15 *Sean E un espacio vectorial, V y W dos subespacios de E. Demuestre que $V \cup W$ es subespacio de E si y solo si $V \subset W$ o $W \subset V$.*

Ejercicio 0.16 *En $\mathbb{R}^3$, considere los subespacios:*

$$V = \{(x,y,z)/x = y = z\}, \quad W = \{(0,y,z)\}.$$

Demuestre que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Ejercicio 0.17 *En $\mathbb{R}^3$, considere los subespacios:*

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z)/x + y + z = 0\}, \\ V &= \{(x,y,z)/x = z\}, \\ W &= \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

a) Calcule: $U + V$, $U + W$, $V + W$, $(U \cap V) + (U \cap W)$, $U \cap (V + W)$.

b) Diga en qué casos las sumas calculadas son directas.

c) Diga qué subespacios son suplementarios con respecto a $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 0.18 *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre K. En el espacio $E \times F$ considere los espacios:*

$$\begin{aligned} E' &= \{(x,0)/x \in E\}, \\ F' &= \{(0,y)/y \in F\}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que E' es isomorfo a E y F' es isomorfo a F.

b) Demuestre que $E \times F = E' \oplus F'$.

Ejercicio 0.19 *En el espacio de las matrices $M_2(\mathbb{R})$ se definen:*

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} /a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \\ W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} /a, b, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que V y W son subespacios de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Halle $V \cap W$ y $V + W$.

c) Halle una base y la dimensión de: V, W, $V \cap W$ y $V + W$.

Ejercicio 0.20 *En el espacio $M_2(\mathbb{C})$, el conjunto $W = \{A = (a_{ij})/$ Traza $(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0\}$ es un subespacio de $M_2(\mathbb{C})$. Halle una base de W y calcule su dimensión.*

Ejercicio 0.21 *En el espacio* $M_n(\mathbb{C})$,

$$W = \{A/Traza(A) = 0\}.$$

Calcule la dimensión de W.

Ejercicio 0.22 *Halle la base y la dimensión de* $M_{m,n}(K)$.

Ejercicio 0.23 *Demuestre que en el espacio de las funciones continuas reales, los vectores* e^t, $\sin t$, $\cos t$ *son linealmente independientes.*

Ejercicio 0.24 *En el espacio* $\mathbb{C}^2$ *considere los vectores:* $v = (1+i, 2i)$ *y* $w = (1, 1+i)$.

a) *Demuestre que* v *y* w *son linealmente independientes si se considera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio.*

b) *Demuestre que* v *y* w *son linealmente dependientes si se considera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{C}$*-espacio.*

Ejercicio 0.25 *Sea* S *el siguiente sistema, constituido por vectores de* $\mathbb{R}^4$:

$$S = ((1, -4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7), (2, -7, -3, 3)).$$

a) *Halle la dimensión de* $< S >$.

b) *Extraiga de* S *una base de* $< S >$.

c) *Complete, si es necesario, la base de* $< S >$ *hallaba en* b), *para obtener una base de* $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 0.26 *Determine si los siguientes sistemas constituyen o no bases de* $\mathbb{C}^3$:

a) $((1, 5, -6), (2i, 1, 8-i), (3, -1-2i, 4))$.

b) $((1, 3, -4), (1, 4, -3), (2, 3, -11))$.

Ejercicio 0.27 *a)* *Demuestre que si en un espacio vectorial* E, *los vectores* u, v, w *son linealmente independientes, los vectores* $u+v$, $u-v$ *y* $u-2v+w$ *son también linealmente independientes.*

b) *¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes que puede obtenerse a partir de combinaciones lineales de los vectores* u, v *y* w*?*

Ejercicio 0.28 *En* $\mathbb{R}^4$ *considere los subespacios:*

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z, t)/x + y = 0, \quad z = 2t\}, \\ W &= \{(x, y, z, t)/y + z + t = 0\}. \end{aligned}$$

Halle una base y la dimensión de: V, W, $V \cap W$, $V + W$, $V \times W$.

Ejercicio 0.29 *En* $\mathbb{R}^4$ *considere los subespacios:*

a) $V =< (1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1) >$; $\quad W =< (1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3) >$.

b) $V =< (1, 1, 2, 4), (2, 1, 5, 2), (1, -1, -4, 0) >$; $\quad W =< (1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, 1), (0, -1, 1, 0) >$.

En cada caso, halle una base y la dimensión de: V, W, $V \cap W$, $V + W$, $V \times W$.

Ejercicio 0.30 *Considere los subespacios de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} V &=< (1,2,3),(2,3,8),(3,2,17) >, \\ W &= \{(x,y,z)/2z-y=0\}. \end{aligned}$$

a) *Halle una base y la dimensión de:* V, W, $V \cap W$, $V+W$.

b) *Halle un suplemento de* $V \cap W$ *en* W.

Ejercicio 0.31 *Sean* E *un espacio vectorial de dimensión 4 y* (e_1,e_2,e_3,e_4) *una base de* E.

a) *Determine qué valores debe poseer el parámetro* k *para que los vectores:*

$$\begin{aligned} v_1 &= ku_2 + u_3 - ku_4, \\ v_2 &= 2u_1 + u_2 + 3u_4, \\ v_3 &= 2ku_2 + ku_3, \\ v_4 &= u_1 - u_2, \end{aligned}$$

formen una base de E.

b) *Para los valores de* k *tales que* (e_1,e_2,e_3,e_4) *no forman una base de* E*, halle una base y la dimensión del subespacio generado por ellos.*

Ejercicio 0.32 *En el espacio de las funciones* $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *como espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$*, considere el subespacio* V *generado por las funciones:*

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos x.$$

a) *Demuestre que* V *tiene dimensión 3.*

b) *Demuestre que el sistema de vectores* $\left(e^{ix}, e^{-ix}, 1\right)$ *es una base de* V *y halle la matriz de cambio de coordenadas de* (f_1,f_2,f_3) *a* $\left(e^{ix}, e^{-ix}, 1\right)$.

Ejercicio 0.33 *En el espacio de polinomios de grado menor que 4,* $K_4[x]$, $\left(1,x,x^2,x^3\right)$ *es una base. Sea* $a \in \mathbb{K}$*. Demuestre que* $\left(1,(x-a),(x-a)^2,(x-a)^3\right)$ *es también una base de* $K_4[x]$ *y halle las coordenadas de un polinomio cualquiera* $c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ *en esta base.*

Ejercicio 0.34 *En el espacio de las matrices simétricas de orden 2,* $MS_2(\mathbb{R})$*, demuestre que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$

forman una base y halle las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ *en esta base.*

Ejercicio 0.35 *En el espacio de las matrices simétricas de orden 2,* $MS_2(\mathbb{R})$*, demuestre que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

forman una base y halle la matriz de cambio de coordenadas de la base del ejercicio 0.34 a esta nueva base.

Ejercicio 0.36 *Sea E un espacio vectorial real de dimensión 3. Sea $x \in E$, cuyo vector de coordenadas con respecto a una base (a_1, a_2, a_3) de E es*

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Demuestre que existe una base (b_1, b_2, b_3) de E en la cual el vector de coordenadas de x es

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 0.37 *En $\mathbb{R}^5$ considere el subespacio:*

$$V =< (3, 21, 0, 9, 0), (1, 7, -1, -2, -1), (2, 14, 0, 6, 1), (6, 42, -1, 13, 0) > .$$

a) Halle una base de V.

b) Halle un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tal que V sea el espacio solución del sistema.

c) A partir del sistema hallado, encuentre otra base de V.

Ejercicio 0.38 *En $\mathbb{C}^3$ considere el subespacio complejo:*

$$V =< (1, 0, i), (1 + i, 1 - i, 1), (i, i, i) > .$$

a) Halle una base de V.

b) Halle un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tal que V sea el espacio solución del sistema.

c) A partir del sistema hallado, encuentre otra base de V.

Ejercicio 0.39 *En el espacio vectorial dado en cada caso, investigue si el sistema de vectores (a_i) es una base del espacio y halle las coordenadas del vector v en la base (a_i) y la matriz de cambio de cambio de coordenadas de la base canónica a la base (a_i).*

a) En $\mathbb{R}^3 : v = (6, 2, -7)$; $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$.

b) En $\mathbb{R}^3 : v = (6, 9, 14)$; $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$.

c) En $\mathbb{R}^3 : v = (6, 2, -7)$; $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0)$.

d) En $\mathbb{R}^3 : v = (6, 2, -7)$; $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -3)$, $a_3 = (1, -1, 1)$.

e) En $\mathbb{R}^4 : v = (7, 14, -1, 2)$; $a_1 = (1, 2, -1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 0, -1)$, $a_3 = (1, 2, 1, 4)$, $a_4 = (1, 3, -1, 0)$.

Ejercicio 0.40 *En un espacio vectorial E, sean L un sistema de vectores linealmente independiente, $< L >$ el subespacio generado por L, a un vector de E tal que $a \notin < L >$. Demuestre que $L \cup \{a\}$ es linealmente independiente.*

Ejercicio 0.41 *Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Demuestre las propiedades siguientes:*

a) *Todo subconjunto de vectores de E que contiene más de n vectores, es linealmente dependiente.*

b) *Ningún subconjunto de E que contiene menos de n vectores, puede generar a E.*

c) *Si F es un subespacio de E, entonces F es de dimensión finita y $\dim F \leq \dim E$.*

Ejercicio 0.42 *En $K[x]$ sea $p(x)$ un polinomio de grado n. Se define:*

$$[p(x)] = \{p(x) \cdot q(t)/q(x) \in K[x]\}$$

Demuestre que $[p(x)]$ es un subespacio de $K[x]$ y $K[x] = [p(x)] \oplus K_n[x]$.

Ejercicio 0.43 *Sean V, W dos subespacios vectoriales de un espacio E sobre K. Demuestre que si S_1 es un sistema generador de V y S_2 es un sistema generador de W, entonces $S_1 \cup S_2$ es un sistema generador de $V + W$.*